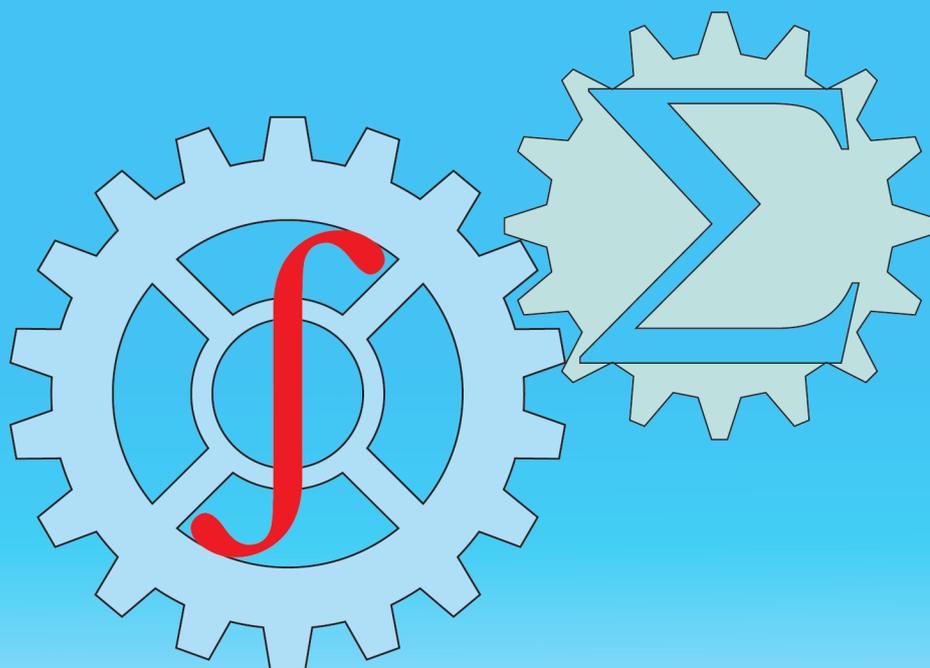




ISSN: 2010-7250
Published from 1992

Институт механики и сейсмостойкости сооружений
Mechanika va inshootlar seysmik mustahkamligi instituti

МЕХАНИКА МУАММОЛАРИ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ PROBLEMS OF MECHANICS



2025
Volume 34
No: 4

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

МЕХАНИКА
МУАММОЛАРИ

O‘ZBEKISTON
JURNALI

4

2025

УЗБЕКСКИЙ
ЖУРНАЛ

ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ

Журнал под таким названием издается с января 1992 г.

Ташкент – 2025

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор – докт. физ.-мат. наук, проф. К.С. СУЛТАНОВ
Заместитель главного редактора – докт. физ.-мат. наук Р.А. АБИРОВ
Заместитель главного редактора – PhD Н.А. НИШОНОВ
Ответственный секретарь – докт. тех. наук М.М. ХАМДАМОВ

Абдикаримов Р.А. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Мирсаидов М. д.т.н., проф., акад. АН РУз (Ташкент)
Абдусаттаров А. д.т.н., проф. (Ташкент)	Мухаммадиев Д.М. д.т.н., проф. (Ташкент)
Азимов Д. д.т.н., проф. (США)	Панахов Г.М. д.т.н., проф., член-корр. НАНА (Баку)
Алдошин Н.В. д.т.н., проф. (Москва)	Паровик Р. д.ф.-м.н. (Петропавловск-Камчатский)
Алимухамедов Ш.П. д.т.н., проф. (Ташкент)	Ризаев А.А. д.т.н., проф. (Ташкент)
Ахмедов А.Б. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Сагдиев Х.С. к.т.н. (Ташкент)
Бахадиров Г.А. д.т.н., проф. (Ташкент)	Сирожиддинов З. д.т.н., проф. (Самарканд)
Быковцев А.С. д.ф.-м.н., проф. (США)	Старовойтов Э.И. д.ф.-м.н. (Гомель, Беларусь)
Ватин Н.И. д.т.н., проф. (Санкт-Петербург)	Тохилов Ш.М. к.ф.-м.н. (США)
Дусматов О.М. д.ф.-м.н., проф. (Самарканд)	Тухтакузиев А.Т. д.т.н., проф. (Ташкент)
Зубарев А.Ю. д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург)	Юлдашев Ш.С. д.т.н., проф. (Наманган)
Исмоилова С.И. д.т.н., проф. (Ташкент)	Худайкулиев Р.Р. к.т.н. (Ташкент)
Казанцев С.П. д.т.н., проф. (Москва)	Хужаев И.К. д.т.н., проф. (Ташкент)
Кузнецов С.В. д.ф.-м.н., проф. (Москва)	Хужаёров Б.Х. д.ф.-м.н., проф. (Самарканд)
Маликов З.М. д.т.н., проф. (Ташкент)	Хусанов Б.Э. д.т.н. (Ташкент)
Мамасаидов М.Т. д.т.н., проф., акад. НАН КР (Ош)	Шардаков И.Н. д.ф.-м.н., проф. (Пермь)
Мардонов Б.М. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Эргашов М. д.т.н., проф. (Ташкент)
Матвеев В.П. д.т.н., проф., акад. РАН (Пермь)	Ювмитов А.С. д.т.н., с.н.с. (Ташкент)

Адрес редакции:

*100125, Ташкент, Академгородок, Дурмон йули, 40.
Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз*

*Телефон: +99855 520-02-45
+99855 520-04-46*

E-mail: instmechofficial@gmail.com

Технический редактор: Михайлова В.В.

Журнал зарегистрирован Агентством по печати и информации Республики Узбекистан 22.12.2006 г.
Регистрационный номер 0050.

Номер одобрен на заседании редакционной коллегии журнала 25.12.2025

Сдано в набор 15.12.2025. Подписано в печать 29.12.2025.

Формат 60×84 1/8. Гарнитура Times New Roman. Ризография.

Усл.- печ. л. 6.5. Уч.-изд. л. 6.82. Тираж 130.

Цена договорная.

Отпечатано в типографии ООО “Munis design group”:

100170, г. Ташкент, ул. Буз-2, презд, дом 17-А.

- [13] Mirsaidov, M., Usarov, M. Bimoment theory construction to assess the stress state of thick orthotropic plates // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2020, Vol. 614, No. 1, P.012090.
- [14] Усаров М.К. Бимоментная теория толстых анизотропных пластин. Ташкент. Fan ziyosi, 2022, 246 с.
- [15] Usarov M., Usanov F. On solution of the problem of bending and vibrations of thick plates on the basis of the bimoment theory // AIP Conference Proceedings. 2022, Vol. 2637, Art. 0118598 (7 p.).

Дата поступления
03.10.2025

Usanov F.A. Bimoment nazariyasi asosida urinma yuklar ta'siridagi plastinaning kuchlanganlik–deformatsiyalanganlik holatini baholash.

Annotatsiya. Maqola plastinaning ustki qismiga qo'yilgan urinma yuklar ta'siridagi kuchlanganlik–deformatsiyalanganlik holatini bimoment nazariyasi asosida baholashga bag'ishlangan. Ishda kuchlanganlik–deformatsiyalanganlik holatini hisoblash uslubiyoti va dasturi taklif qilingan, shuningdek, konsol plastina tebranishining dinamik masalasining matematik qo'yilishi keltirilgan. Kuchlar, momentlar va bimomentlarni hisobga oluvchi tegishli chegaraviy shartlar bilan birga harakatning differensial tenglamalari taklif etilgan. Masala chekli ayirmalar usuli yordamida sonli yechilgan. Normal kuchlanishlarni hisoblashning sonli natijalari keltirilgan.

Kalit so'zlar: Ko'chishlar, kuchlanishlar, kuchlar, momentlar, bimomentlar, kuchlanganlik–deformatsiyalanganlik holati, bimoment nazariyasi, urinma yuk, harakat tenglamalari, chegaraviy shartlar, chekli ayirmalar usuli.

Usanov F.A. Evaluation of the stress-strain state of a plate under the action of tangential loads based on the bimoment theory.

Abstract. The article is devoted to the assessment of the stress-strain state (SSS) of a plate under the action of tangential loads applied to its facial surface, based on the bimoment plate theory. The paper proposes a methodology and program for calculating the SSS, and presents the mathematical formulation of the dynamic problem of cantilever plate vibrations. Differential equations of motion with corresponding boundary conditions are proposed, which take into account forces, moments, and bimoments. The problem was solved using the finite difference method. Numerical results for the calculation of normal stresses are presented.

Keywords: displacements, stresses, forces, moments, bimoments. stress-strain state, bimoment theory, tangential load, equations of motion, boundary conditions, finite difference method.

УДК 532.546

ЗАДАЧА АНОМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В КУСОЧНО–НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

^{1,2} Хужаёров Б.Х., ³ Туйгунов Ж.Р.

¹ Самаркандский государственный университет им. Шарафа Рашидова

² Институт Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан

³ Самаркандский государственный университет архитектуры и строительства им. М. Улугбека

E-mail: b.khuzhayorov@mail.ru, tuygunovjavlonbek@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрена задача аномальной фильтрации жидкости в кусочно-неоднородной фрактальной пористой среде. В математической модели задачи учитывается сложная структура среды - кусочная неоднородность проницаемости. Для описания аномальности процесса используется дробная производная в уравнении пьезопроводности. Уравнение аппроксимировано методом конечных разностей и получены численные решения. Проанализированы профили давления и скорости фильтрации при различных порядках дробной производной. Определено влияние изменения проницаемости и порядка дробной производной на распределение фильтрационных характеристик в различные моменты времени.

Ключевые слова: аномальная фильтрация, давление, дробная производная, кусочно-неоднородные среды, метод конечных разностей, неоднородная проницаемость, скорость фильтрации, фрактальная проницаемость.

Введение. Классический закон Дарси описывает течение жидкостей в пористых средах под действием перепада давления [1]. Этот закон является теоретической основой для моделирования движения жидкости через пористые среды во многих областях, таких как гидрогеология, нефтегазовая промышленность и геотехника [2]. Однако во фрактальных пористых средах вследствие изменения проницаемости во времени наблюдается замедление течения жидкости в пористых средах. Для моделирования этих явлений используется дробная производная и вводится понятие «памяти» [3,4,5]. Концепция памяти жидкости является важным фактором при рассмотрении моделей течения. В [6] представлена модель напряжения-деформации пористой среды, включающая некоторые параметры и свойства среды. Полученная математическая модель показывает влияние температуры, поверхност-

ного натяжения, изменений давления и памяти жидкости на поведение напряжения-деформации. При этом учитывается зависимость напряжения-деформации, связанная с памятью, и рассматривается изменение во времени и расстоянии для различных значений порядка дробной производной. В [7] была разработана обобщенная форма уравнения Фика на основе "модели памяти" и показана возможность описания аномальных диффузионных процессов в биологических и геологических системах. В [8] исследовался процесс фильтрации в двух средах с различной проницаемостью. При этом особый интерес представляет вопрос фильтрации жидкостей в кусочно-неоднородных пористых средах, потому что в таких системах проницаемость и упругость слоев различны, что приводит к значительному отличию процесса от классического. В [9] предложены аналитические решения на основе межслойных условий для стационарного случая.

В данной работе рассмотрено уравнение пьезопроводности, описывающее аномальную фильтрацию жидкости в кусочно-неоднородной пористой среде. Задача решена численно с аппроксимацией дробных производных исходя из определения Капуто [3,4,5]. Для различных значений коэффициентов проницаемости и порядка дробной производной определены давление, профили давления и поля скорости фильтрации в различные моменты времени. Оценена роль влияния дробной производной на эти характеристики.

Постановка задачи. Закон Дарси с учетом аномальности записываем в виде:

$$v = -\frac{k(x)}{\mu} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где v – скорость фильтрации, $k(x)$ – фрактальная кусочно-неоднородная проницаемость, p – давление, t – время, μ – динамический коэффициент вязкости, α ($0 \leq \alpha \leq 1$) – порядок производной.

Уравнение фильтрации для (1) в одномерном случае имеет вид:

$$\mu \beta^* \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} \right) \right), \quad (2)$$

где β^* – коэффициент упругости среды.

Пусть отрезок $[0, L_1]$ состоит из трех частей $[0, L_1/3]$, $[L_1/3, 2L_1/3]$, $[2L_1/3, L_1]$, которые назовем зонами. В каждой зоне проницаемость $k_f(x)$ описывается различными функциями $k_1(x)$, $k_2(x)$, $k_3(x)$, соответственно. В точках $L_1/3$, $2L_1/3$ проницаемость в общем случае имеет разрывы первого рода. Такая среда представляет собой кусочно-неоднородную среду.

Начальное условие принимаем в виде:

$$p(0, x) = p_0 = const. \quad (3)$$

Граничные условия следующие:

$$p(t, 0) = p_c, \quad p(t, L_1) = 0, \quad p_c = const. \quad (4)$$

В точках разрыва проницаемости давление и скорость фильтрации остаются непрерывными. Соответственно, принимаются следующие условия:

$$p(t, x) \Big|_{x=(\frac{L_1}{3})-0} = p(t, x) \Big|_{x=(\frac{L_1}{3})+0}, \quad (5)$$

$$p(t, x) \Big|_{x=(\frac{2L_1}{3})-0} = p(t, x) \Big|_{x=(\frac{2L_1}{3})+0}, \quad (6)$$

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{x=(\frac{L_1}{3})-0} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{x=(\frac{L_1}{3})+0}, \quad (7)$$

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{x=(\frac{2L_1}{3})-0} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{x=(\frac{2L_1}{3})+0}. \quad (8)$$

Задача заключается в решении уравнения (2) с условиями (3)-(8). Зная поле давления, из (1) определяется скорость фильтрации v .

Алгоритм численного решения. Уравнение (2) при условиях (3)-(8) решается методом конечных разностей с аппроксимацией дробных производных как в [10,11,12]. Для этого в области $\{0 \leq t \leq T_{\max}, 0 \leq x \leq L_1\}$ введем сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, M, \tau = T_{\max}/M\}$, где h – шаг сетки в направлении x , τ – шаг сетки по времени. Из этих двух сеток построим $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ – двумерную сетку. Ее узлы состоят из точек (t_j, x_i) , $i = \overline{0, N}$; $j = \overline{0, M}$. Значения сеточной функции давления в точке (t_j, x) обозначим через p^j . Поскольку среда состоит из трех частей и сетка равномерная, чтобы узлы сетки попали в точки $x=L_1/3$ и $x=2L_1/3$ значение N принимаем кратным 3. Тогда этим точкам будут соответствовать $i=N/3$ и $i=2N/3$.

На этой сетке уравнение (2) аппроксимируется подобным образом, как в [13,14,15,16]:

$$\mu\beta^* \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[k(x_{i+0.5}) \cdot \left(\frac{\partial^\alpha p_{i+1}^{j+1}}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^\alpha p_i^{j+1}}{\partial t^\alpha} \right) - k(x_{i-0.5}) \cdot \left(\frac{\partial^\alpha p_i^{j+1}}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^\alpha p_{i-1}^{j+1}}{\partial t^\alpha} \right) \right]. \quad (9)$$

Аппроксимируя дробную производную $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$, по определению Капуто из уравнения (9) получим

$$\mu\beta^* \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \frac{1}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \left[k(x_{i+0.5}) (S_{p_1} + p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j - S_{p_2} - p_i^{j+1} + p_i^j) - k(x_{i-0.5}) (S_{p_2} + p_i^{j+1} - p_i^j - S_{p_3} - p_{i-1}^{j+1} + p_{i-1}^j) \right] \quad (10)$$

или

$$p_i^{j+1} - p_i^j = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\mu\beta^* h^2 \Gamma(2-\alpha)} \left[k(x_{i+0.5}) (S_{p_1} + p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j - S_{p_2} - p_i^{j+1} + p_i^j) - k(x_{i-0.5}) (S_{p_2} + p_i^{j+1} - p_i^j - S_{p_3} - p_{i-1}^{j+1} + p_{i-1}^j) \right], \quad (11)$$

где

$$S_{p_1} = \sum_{l=0}^{j-1} (p_{i+1}^{l+1} - p_{i+1}^l) ((j-l+1)^{1-\alpha} - (j-l)^{1-\alpha}), \quad S_{p_2} = \sum_{l=0}^{j-1} (p_i^{l+1} - p_i^l) ((j-l+1)^{1-\alpha} - (j-l)^{1-\alpha}),$$

$$S_{p_3} = \sum_{l=0}^{j-1} (p_{i-1}^{l+1} - p_{i-1}^l) ((j-l+1)^{1-\alpha} - (j-l)^{1-\alpha}),$$

$i = \overline{1, N-1}$; $j = \overline{0, M-1}$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция.

Вводим следующее обозначение

$$K_p = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\mu\beta^* h^2 \Gamma(2-\alpha)}.$$

Уравнения (11) можно представить в виде

$$A_i p_{i+1}^{j+1} - B_i p_i^{j+1} + C_i p_{i-1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (12)$$

где

$$A_i = K_p k(x_{i+0.5}); \quad B_i = (1 + K_p k(x_{i+0.5}) + K_p k(x_{i-0.5})); \quad C_i = K_p k(x_{i-0.5});$$

$$F_i^j = -(p_i^j + K_p k(x_{i+0.5}) S_{p_1} - K_p k(x_{i+0.5}) p_{i+1}^j - K_p k(x_{i+0.5}) S_{p_2} + K_p k(x_{i+0.5}) p_i^j - K_p k(x_{i-0.5}) S_{p_2} + K_p k(x_{i-0.5}) p_{i-1}^j + K_p k(x_{i-0.5}) S_{p_3} - K_p k(x_{i-0.5}) p_{i-1}^j).$$

Начальное условие (3) аппроксимируется как

$$p_i^0 = p_0, i = \overline{0, N}. \quad (13)$$

Граничные условия (3) в разностной форме имеют вид:

$$p_0^{j+1} = p_c, p_N^{j+1} = p_0. j = 0, 1, \dots, . \quad (14)$$

Система уравнений (12) решается методом прогонки. Используем следующее соотношение

$$p_i^{j+1} = \delta_{i+1} \cdot p_{i+1}^{j+1} + \eta_{i+1}, \quad (15)$$

где δ_{i+1}, η_{i+1} – прогоночные коэффициенты.

При использовании (15) из (12) получаем следующие рекуррентные формулы для определения коэффициентов δ_{i+1}, η_{i+1}

$$\delta_{i+1} = \frac{-C_i}{A_i \cdot \delta_i - B_i}, \eta_{i+1} = \frac{-(F_i^j + A_i \cdot \eta_i)}{A_i \cdot \delta_i - B_i}, i = 1, \dots, \frac{N}{3}, \frac{N}{3} + 2, \dots, \frac{2N}{3}, \frac{2N}{3} + 2, \frac{2N}{3} + 3, \dots, N-1. \quad (16)$$

Начальные значения коэффициентов δ_{i+1}, η_{i+1} определяются из условий (14): $\delta_1=0, \eta_1=p_c$.

В точке $i=N/3$ условие (7) запишем как

$$k_{\frac{N}{3}-1} \left\{ \left(\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} \right)_{\frac{N}{3}} - \left(\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} \right)_{\frac{N}{3}-1} \right\} = k_{\frac{N}{3}+1} \left\{ \left(\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} \right)_{\frac{N}{3}+1} - \left(\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} \right)_{\frac{N}{3}} \right\}. \quad (17)$$

После аппроксимации производных получим

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \left(S_{p_5} + p_{\frac{N}{3}}^{j+1} - p_{\frac{N}{3}}^j \right) = \frac{k_{\frac{N}{3}-1}}{k_{\frac{N}{3}-1} + k_{\frac{N}{3}+1}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \cdot \left(S_{p_6} + p_{\frac{N}{3}-1}^{j+1} - p_{\frac{N}{3}-1}^j \right) + \frac{k_{\frac{N}{3}-1}}{k_{\frac{N}{3}-1} + k_{\frac{N}{3}+1}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \left(S_{p_4} + p_{\frac{N}{3}+1}^{j+1} - p_{\frac{N}{3}+1}^j \right), \quad (18)$$

где

$$S_{p_4} = \sum_{l=0}^{j-1} \left(p_{\frac{N}{3}+1}^{l+1} - p_{\frac{N}{3}+1}^l \right) \left((j-l+1)^{1-\alpha} - (j-l)^{1-\alpha} \right),$$

$$S_{p_5} = \sum_{l=0}^{j-1} \left(p_{\frac{N}{3}}^{l+1} - p_{\frac{N}{3}}^l \right) \left((j-l+1)^{1-\alpha} - (j-l)^{1-\alpha} \right),$$

$$S_{p_6} = \sum_{l=0}^{j-1} \left(p_{\frac{N}{3}-1}^{l+1} - p_{\frac{N}{3}-1}^l \right) \left((j-l+1)^{1-\alpha} - (j-l)^{1-\alpha} \right).$$

Вводим следующие обозначения

$$D_1 = \frac{k_{\frac{N}{3}-1}}{k_{\frac{N}{3}-1} - k_{\frac{N}{3}+1}}, D_2 = \frac{k_{\frac{N}{3}+1}}{k_{\frac{N}{3}-1} - k_{\frac{N}{3}+1}}.$$

Тогда (18) можно записать как

$$S_{p_5} + p_{\frac{N}{3}}^{j+1} - p_{\frac{N}{3}}^j = D_1 \cdot S_{p_6} + D_1 \left(p_{\frac{N}{3}-1}^{j+1} - p_{\frac{N}{3}-1}^j \right) + D_2 \cdot S_{p_4} + D_2 \left(p_{\frac{N}{3}+1}^{j+1} - p_{\frac{N}{3}+1}^j \right). \quad (19)$$

Соотношение (15) в точке $N/3-1$ запишем как

$$p_{\frac{N}{3}-1}^{j+1} = \delta_{\frac{N}{3}} \cdot p_{\frac{N}{3}}^{j+1} + \eta_{\frac{N}{3}},$$

подставляя его в (19), получим

$$p_{\frac{N}{3}}^{j+1} = \frac{D_2}{1 - D_1 \delta_{\frac{N}{3}}} p_{\frac{N}{3}+1}^{j+1} + \frac{\left(p_{\frac{N}{3}}^j - S_{p_5} + D_1 S_{p_6} - D_1 p_{\frac{N}{3}-1}^j + D_1 \eta_{\frac{N}{3}} + D_2 S_{p_4} - D_2 p_{\frac{N}{3}+1}^j \right)}{\left(1 - D_1 \delta_{\frac{N}{3}} \right)}. \quad (20)$$

Сравнивая (20) с

$$p_{\frac{N}{3}}^{j+1} = \delta_{\frac{N}{3}+1} \cdot p_{\frac{N}{3}+1}^{j+1} + \eta_{\frac{N}{3}+1}, \quad (21)$$

получим

$$\delta_{\frac{N}{3}+1} = \frac{D_2}{1 - D_1 \delta_{\frac{N}{3}}}, \quad \eta_{\frac{N}{3}+1} = \frac{\left(p_{\frac{N}{3}}^j - S_{p_5} + D_1 S_{p_6} - D_1 p_{\frac{N}{3}-1}^j + D_1 \eta_{\frac{N}{3}} + D_2 S_{p_4} - D_2 p_{\frac{N}{3}+1}^j \right)}{\left(1 - D_1 \delta_{\frac{N}{3}} \right)}.$$

Далее, прогоночные коэффициенты δ_i , η_i , $i=2N/3+2$, $N/3+3$, ..., $2N/3$ определяются из (16).

В точке $i=2N/3$ условие (8) запишем как

$$k_{\frac{2N}{3}-1} \left\{ \left(\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} \right)_{\frac{2N}{3}} - \left(\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} \right)_{\frac{2N}{3}-1} \right\} = k_{\frac{2N}{3}+1} \left\{ \left(\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} \right)_{\frac{2N}{3}+1} - \left(\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} \right)_{\frac{2N}{3}} \right\}. \quad (22)$$

После аппроксимации производных получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \left(S_{p_8} + p_{\frac{2N}{3}}^{j+1} - p_{\frac{2N}{3}}^j \right) &= \frac{k_{\frac{2N}{3}-1}}{k_{\frac{2N}{3}-1} + k_{\frac{2N}{3}+1}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \times \\ &\times \left(S_{p_9} + p_{\frac{2N}{3}-1}^{j+1} - p_{\frac{2N}{3}-1}^j \right) + \frac{k_{\frac{2N}{3}-1}}{k_{\frac{2N}{3}-1} + k_{\frac{2N}{3}+1}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \left(S_{p_7} + p_{\frac{2N}{3}+1}^{j+1} - p_{\frac{2N}{3}+1}^j \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} S_{p_7} &= \sum_{l=0}^{j-1} \left(p_{\frac{2N}{3}+1}^{l+1} - p_{\frac{2N}{3}+1}^l \right) \left((j-l+1)^{1-\alpha} - (j-l)^{1-\alpha} \right), \\ S_{p_8} &= \sum_{l=0}^{j-1} \left(p_{\frac{2N}{3}}^{l+1} - p_{\frac{2N}{3}}^l \right) \left((j-l+1)^{1-\alpha} - (j-l)^{1-\alpha} \right), \\ S_{p_9} &= \sum_{l=0}^{j-1} \left(p_{\frac{2N}{3}-1}^{l+1} - p_{\frac{2N}{3}-1}^l \right) \left((j-l+1)^{1-\alpha} - (j-l)^{1-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Вводим следующие обозначения

$$D_3 = \frac{k_{\frac{2N}{3}-1}}{k_{\frac{2N}{3}-1} - k_{\frac{2N}{3}+1}}, \quad D_4 = \frac{k_{\frac{2N}{3}+1}}{k_{\frac{2N}{3}-1} - k_{\frac{2N}{3}+1}}.$$

Тогда (23) можно записать как

$$S_{p_7} + p_{\frac{2N}{3}}^{j+1} - p_{\frac{2N}{3}}^j = D_3 \cdot S_{p_9} + D_3 \left(p_{\frac{2N-1}{3}}^{j+1} - p_{\frac{2N-1}{3}}^j \right) + D_4 \cdot S_{p_7} + D_4 \left(p_{\frac{2N+1}{3}}^{j+1} - p_{\frac{2N+1}{3}}^j \right). \quad (24)$$

Подставляя

$$p_{\frac{2N-1}{3}}^{j+1} = \delta_{\frac{2N}{3}} \cdot p_{\frac{2N}{3}}^{j+1} + \eta_{\frac{2N}{3}}$$

в (24), получим соотношение

$$p_{\frac{2N}{3}}^{j+1} = \frac{D_4}{1 - D_3 \delta_{\frac{2N+1}{3}}} p_{\frac{2N}{3}}^{j+1} + \frac{\left(p_{\frac{2N}{3}}^j - S_{p_8} + D_3 \cdot S_{p_9} - D_3 \cdot p_{\frac{2N-1}{3}}^j + D_3 \eta_{\frac{2N}{3}} + D_4 \cdot S_{p_7} - D_4 \cdot p_{\frac{2N+1}{3}}^j \right)}{\left(1 - D_3 \delta_{\frac{2N+1}{3}} \right)} \quad (25)$$

Сравнивая (25) с

$$p_{\frac{2N}{3}}^{j+1} = \delta_{\frac{2N+1}{3}} \cdot p_{\frac{2N+1}{3}}^{j+1} + \eta_{\frac{2N+1}{3}}, \quad (26)$$

определим прогоночные коэффициенты

$$\delta_{\frac{2N+1}{3}} = \frac{D_4}{1 - D_3 \delta_{\frac{2N+1}{3}}},$$

$$\eta_{\frac{2N+1}{3}} = \frac{\left(p_{\frac{2N}{3}}^j - S_{p_8} + D_3 \cdot S_{p_9} - D_3 \cdot p_{\frac{2N-1}{3}}^j + D_3 \eta_{\frac{2N}{3}} + D_4 \cdot S_{p_7} - D_4 \cdot p_{\frac{2N+1}{3}}^j \right)}{\left(1 - D_3 \cdot \delta_{\frac{2N+1}{3}} \right)}.$$

Далее, прогоночные коэффициенты $\delta_i, \eta_i, i=2N/3+2, 2N/3+3, \dots, N-1$ определяются по (16).

Расчет решения p_i^{j+1} осуществляется с $p_N^{j+1}=0$ в убывающем порядке изменения индекса i от N . В соответствии с (15) имеем

$$p_{N-1}^{j+1} = \eta_N.$$

Сеточный аналог закона Дарси имеет вид

$$v_i^{j+1} = -\frac{k(x)}{\mu} \frac{\tau^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} \left(S_{p_1} + \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j}{\tau} - S_{p_2} - \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} \right). \quad (27)$$

Результаты и обсуждение

Используются следующие значения исходных параметров: $k_0=10^{-14} \text{ м}^2\text{с}^\alpha$, $\mu=10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\beta^*=10^{-8} \text{ 1/Па}$, $p_c=5 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $L=3 \text{ м}$, $t_{\max}=700\text{с}$. Параметры сетки: $\tau=1\text{с}$, $h=0.1 \text{ м}$.

Проницаемость среды принимается в виде

$$k(x) = \begin{cases} k_1 = k_0(1+x), & x \in \left[0, \frac{L_1}{3} \right), \\ k_2 = -\frac{3}{L_1}x^2 + 2x + 2, & x \in \left[\frac{L_1}{3}, \frac{2L_1}{3} \right), \\ k_3 = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{x}}{\sqrt{L_1}(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \frac{3\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, & x \in \left[\frac{2L_1}{3}, L_1 \right]. \end{cases}$$

Некоторые результаты численных расчетов для различных параметров модели представлены на рис. 1 – 4.

Профили давления для различных значений времени и параметра α показаны на рис. 1. Из графиков видно, что с увеличением времени можно наблюдать более широкое распространение профилей давления. При переходе жидкости из первой зоны с k_1 во вторую с k_2 , а также при переходе со второй зоны с k_2 в третью с k_3 , изменение давления вследствие разрыва $k(x)$ имеет изломы, но в соответствии с (5), (6) непрерывность давления сохраняется.

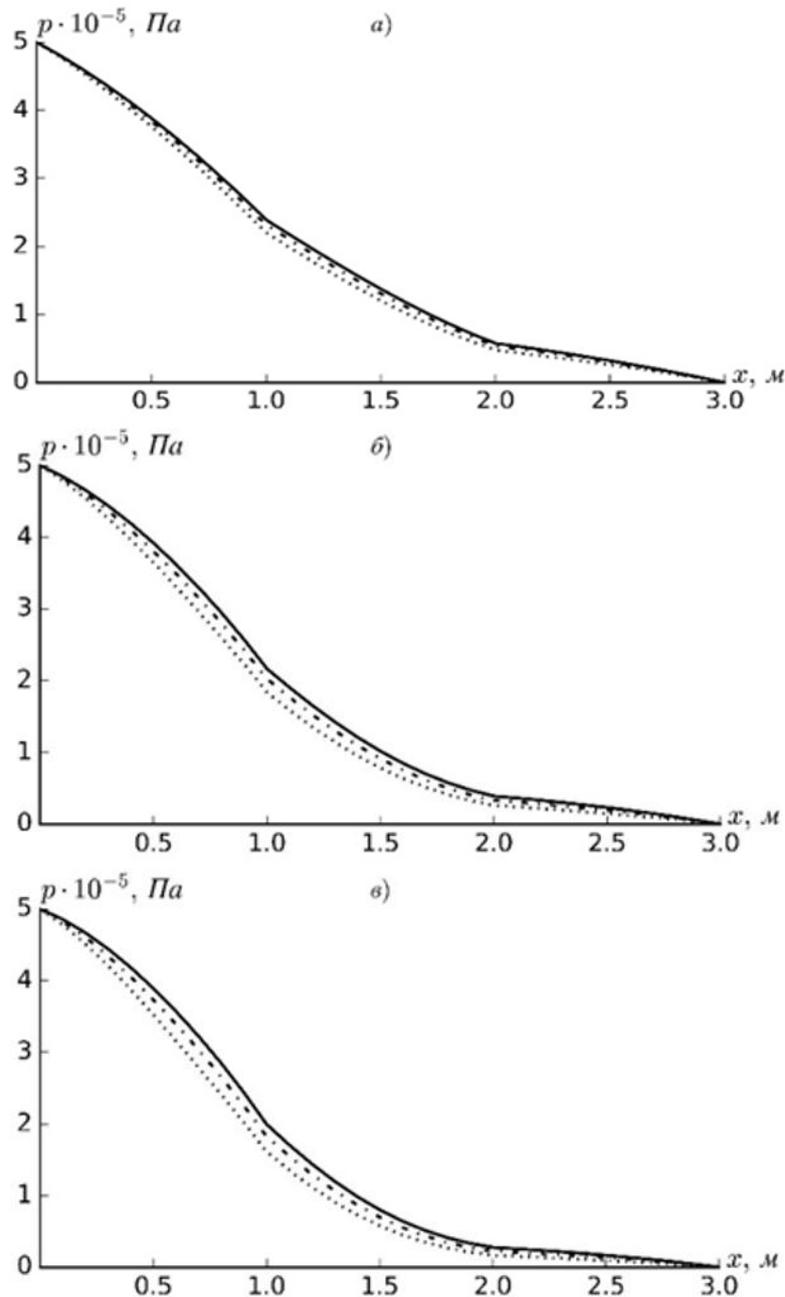


Рис. 1. Профили давления при $\alpha=0$ (а), 0.1 (б), 0.15 (в), $t=500$ (·····), 600 (— · — · —), 700 (—) с

Для того, чтобы более четко показать влияние α на профили давления, на рис. 2 приведены результаты при различных значениях порядка дробной производной α . В первой зоне с ростом времени происходит сравнительное увеличение значений давления, в то время как во второй и третьей зонах значения давления сравнительно уменьшаются. Это, по-видимому, связано с тем, что проницаемость в первой зоне намного ниже, чем во второй

и третьей зонах. Относительно большая проницаемость во второй и третьей зонах приводит к тому, что за счет относительно большей скорости фильтрации жидкость как бы «высасывается» из первой зоны во вторую, и затем в третью.

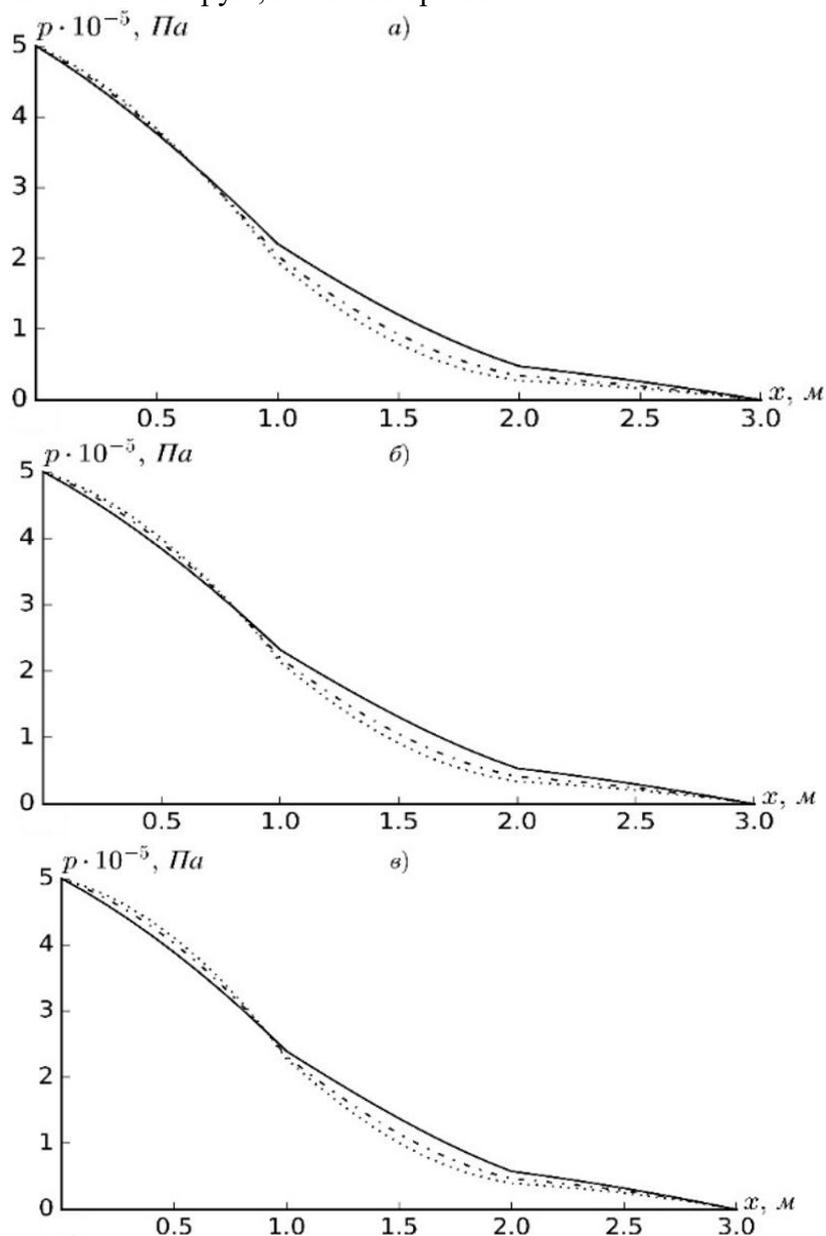


Рис. 2. Профили давления для различных α при $t=500$ (а), 600 (б), 700 (в) с, $\alpha=0$ (—), 0.1 (- - -), 0.15 (· · · ·).

На рис. 3 приведены профили скорости фильтрации v при различных значениях времени и α . Из графиков видно, что по мере увеличения времени можно наблюдать различные закономерности распространения профилей скорости фильтрации. Изломы в темпе изменения v в точках $x=L_1/3$ и $x=2L_1/3$ сохраняются. Непрерывность v в этих точках следует из (7), (8). Как видно из графиков, влияние α в различных зонах изменения $k(x)$ проявляется различным образом. В целом, в этих зонах влияние α характеризуется запаздывающей динамикой давления.

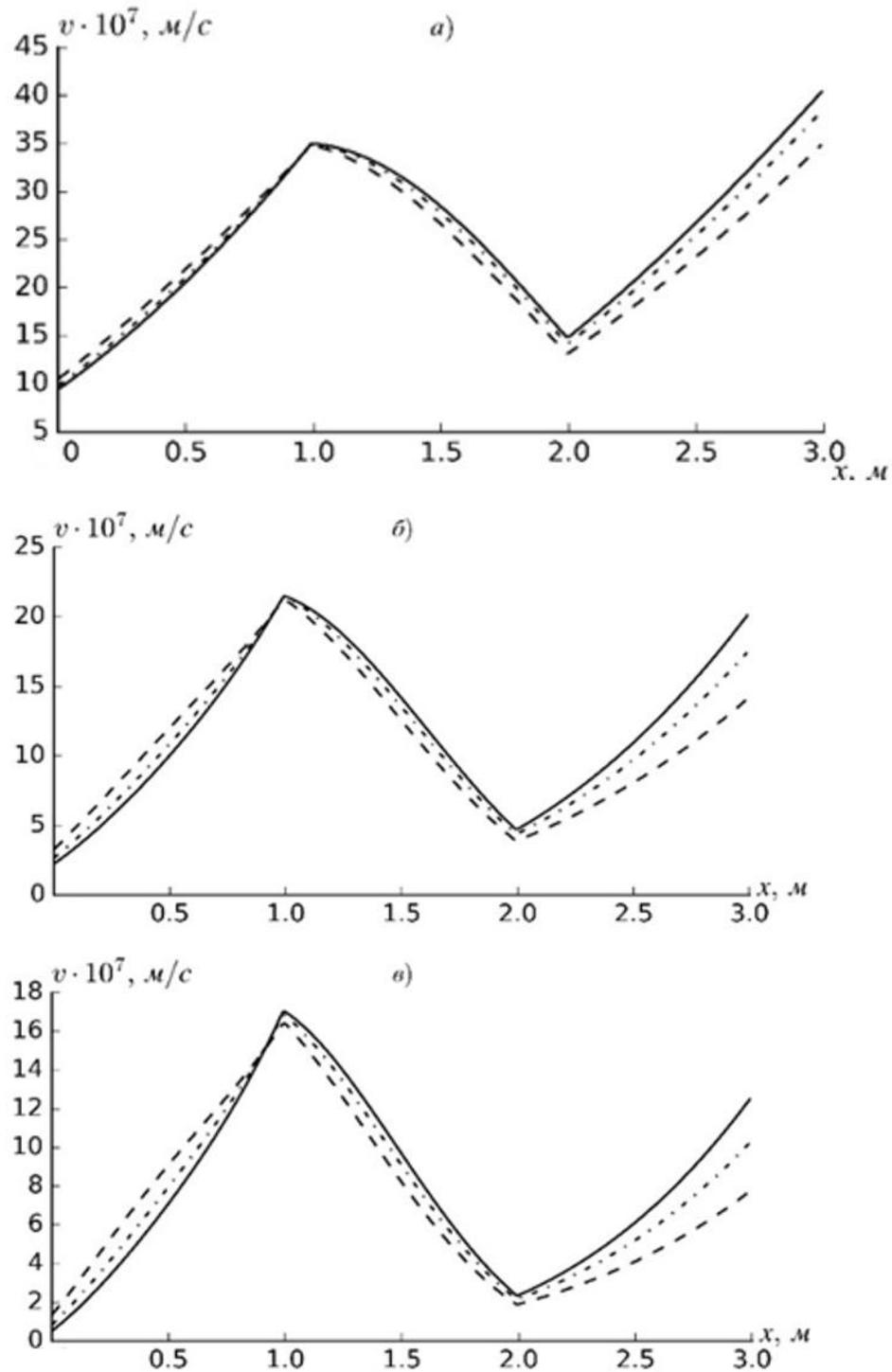


Рис. 3. Профили скорости фильтрации при $\alpha=0$ (а), 0.1 (б), 0.15 (в), $t=500$ (---), 600 (-·-·-), 700 (—), с.

Как и в случае определения влияния α , на профили давления (рис. 2) составлены отдельные графики для различных α при заданных t (рис. 4). Из графиков видно, что увеличение значений α приводит к существенному снижению v . При этом явно прослеживается запаздывающая динамика v . В отличие от рис. 2, здесь смена режима от относительно больших значений в первой зоне к относительно меньшим значениям во второй и третьей зонах не происходит. Это объясняется тем, что скорость фильтрации v определяется не самим значением давления, а его градиентом. Кроме того, в соответствии с (1) скорость фильтрации определяется и темпом изменения градиента давления во времени.

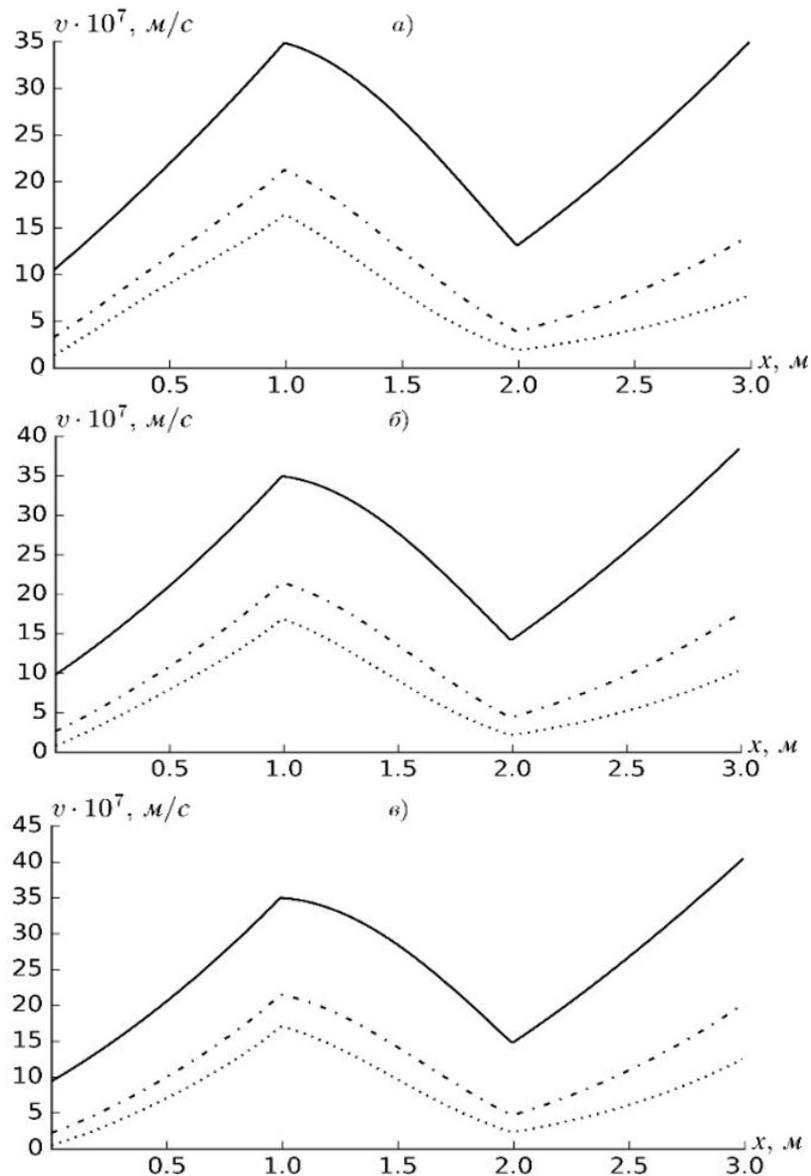


Рис. 4. Профили скорости фильтрации для различных α при $t=500$ (а), 600 (б), 700 (в) с, $\alpha=0$ (—), 0.1 (---), 0.15 (.....).

Заметим, что в точках разрыва $k(x)$ значения слева или справа известны. Поэтому в численных расчетах использование (7), (8) не создает вычислительных трудностей. В случае, когда в точках разрыва значения $k(x)$ с двух сторон не известны, следует использовать интегро-интерполяционный метод аппроксимации задачи. Тогда интегралы для определения коэффициентов разностной схемы вычисляются во всех точках сетки независимо от того, являются ли значения $k(x)$ непрерывными или разрывными. Другим словами, разностная схема становится однородной и появится возможность осуществления сквозного счета решения.

Заключение. Рассмотрена задача аномальной фильтрации жидкости в конечной одномерной кусочно-неоднородной пористой среде. На основе закона фильтрации М.Капуто написано уравнение пьезопроводности. Для этого уравнения поставлена задача фильтрации жидкости в кусочно-неоднородной пористой среде, состоящей из трех зон с различной проницаемостью. Задача решена численно методом конечных разностей. Определены поля давления и скорости фильтрации. Установлено влияние порядка дробной производной по времени в законе Дарси на характер изменения давления и скорости фильтрации. Для выбранного закона изменения проницаемости во всех зонах получена возрастающая динамика

давления, но с различными темпами, зависящими от порядка дробной производной. Увеличение порядка дробной производной приводит к небольшому сравнительному увеличению давления в первой зоне и сравнительному уменьшению во второй и третьей зонах. Это объяснено низкой проницаемостью первой зоны и относительно высокой проницаемостью второй и третьей зон. Происходит такое явление, что вторая и третья зоны как бы «высасывают» жидкость из первой зоны. Скорость фильтрации в первой зоне с увеличением времени уменьшается, а во второй и третьей зонах – увеличивается. Это объясняется характером изменения проницаемости в зонах. В точках разрыва проницаемости получен разрыв градиента давления, но для давления и скорости фильтрации сохраняется непрерывность. Увеличение порядка дробной производной по времени в законе фильтрации приводит к запаздывающей динамике распределения скорости фильтрации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Barenblatt G. I., Entov V. M., Ryzhik V. M.* Theory of Fluid and Gas Filtration in Porous Media. Dordrecht: Springer, 1990, 397 p.
- [2] *Dullien F.A.L.* Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure. San Diego: Academic Press. 1992, 574 p.
- [3] *Caputo M.* Diffusion of fluids in porous media with memory // *Geothermics*. 1999, Vol. 28, No. 1, pp. 113-130.
- [4] *Caputo M.* Models of flux in porous media with memory // *Water Resources Research*. 2000, Vol. 36, No. 3, pp. 693-705.
- [5] *Di Giuseppe E., Moroni M., Caputo M.* Flux in porous media with memory: models and experiments // *Transport in Porous Media*. 2010, Vol. 83, No. 3, pp. 479-500.
- [6] *Hossain M. E., Mousavizadegan, S. H., Ketata, C., Islam, M. R.* A novel memory-based stress-strain model for reservoir characterization // *Nat Sci Sustainable Technol Res Prog*. 2008, Vol. 1, pp. 1-29.
- [7] *Cesarone F., Caputo M., Cametti C.* Memory formalism in the passive diffusion across highly heterogeneous systems // *Journal of membrane Science*. 2005, Vol. 250, No. 1-2, pp. 79-84.
- [8] *Плецинский Б. И., Шарунов Э. А.* Моделирование линейной нестационарной фильтрации в кусочно-однородных релаксационно-сжимаемых и трещиновато-пористых средах // *Исследования по подземной гидромеханике*. 1983, Т. 6, стр. 105-111.
- [9] *Мукишанина Е.А.* Моделирование установившейся фильтрации жидкости в кусочно-неоднородной упругопористой области в классе почти-периодических функций (плоская задача) // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2023, № 2, стр. 38-46.
- [10] *Yuan X., Jichun W., Luying Z.* Numerical solutions of time-space fractional advection–dispersion equations // *International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences (ICCES'09)*. 2009, Vol. 9, No. 2, pp. 117–126.
- [11] *Alikhanov A. A.* Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation // *Applied Mathematics and Computation*. 2015, Vol. 268, pp. 12-22.
- [12] *Хужаёров Б.Х., Акрамов Ш.Б.* Задача аномальной фильтрации с заданным граничным потоком в одномерном пласте // *Узбекский журнал «Проблемы механики»*. 2024, № 4, стр. 29–36.
- [13] *Samarskii A. A.* The Theory of Difference Schemes. Boca Raton, FL: CRC Press; Marcel Dekker, Inc., 2001, 786 p.
- [14] *Yuan X., Jichun W., Luying Z.* Numerical solutions of time-space fractional advection–dispersion equations // *ICCES*. 2009, Vol. 9, No. 2, pp. 117-126.
- [15] *Khuzhayorov B., Djiyanov T. O., Zokirov M. S.* Generalized relaxation fractional differential model of fluid filtration in a porous medium // *International Journal of Applied Mathematics*. 2024, Vol. 37, No. 1, pp. 119-132.
- [16] *Makhmudov J. M., Usmonov A. I., Kuljanov J. B.* Problem of anomalous filtration in nonhomogeneous porous medium // *International Journal of Applied Mathematics*. 2023, Vol. 36, No. 2, pp. 189-203.

Дата поступления
03.10.2025

Xujayorov B., Tuygunov J.R. Bo'lakli bir jinsli bo'lmagan g'ovak muhitda suyuqliklarning anomal sizish masalasi.

Annotatsiya. Ushbu maqolada bo'lakli bir jinsli bo'lmagan fraktal g'ovak muhitda suyuqliklarning anomal sizishi masalasi qaralgan. Masalaning matematik modelida muhitning murakkab strukturasi - o'tkazuvchanlikning bo'lakli bir jinsli bo'lmaganligi hisobga olinganligi bilan ifodalanadi. Jarayon anomaligini tavsiflash uchun p'yezo'tkazuvchanlik tenglamasida kasr hosila ishlatilgan. Tenglama chekli ayirmalar usuli yordamida approksimatsiya qilingan va sonli natijalar olingan. Bosim va sizish tezligi profilari hosila tartibining turli qiymatlari uchun tahlil qilingan. Vaqtning turli qiymatlarida sizish xarakteristikalarining taqsimlanishiga o'tkazuvchanlik va hosila tartibi o'zgarishlarining ta'siri aniqlangan.

Kalit so'zlar: Anomal filtratsiya, bir jinsli o'tkazuvchanlik, bosim, bo'lakli bir jinsli bo'lmagan muhit, kasr tartibli hosila, sizish tezligi, fraktal o'tkazuvchanlik, chekli ayirmalar usuli.

Khujayorov B., Tuygunov J.R. The problem of anomalous fluid filtration in a piecewise inhomogeneous porous medium.

Abstract. This paper investigates the issue of anomalous fluid filtration in a piecewise inhomogeneous fractal porous medium. The mathematical model accounts for the complex structure of the medium, specifically the piecewise inhomogeneity of permeability. A fractional derivative is employed in the piezoconductivity equation to describe the anomalous process. The equation is approximated using the finite difference method, and numerical solutions are derived. Pressure and filtration velocity profiles are analyzed for different orders of the fractional derivative. The influence of changes in permeability and the order of the fractional derivative on the distribution of filtration characteristics at different time points is determined.

Keywords: anomalous filtration, filtration velocity, finite difference method, fractal permeability, fractional derivative, inhomogeneous permeability, piecewise inhomogeneous media, pressure.

СОДЕРЖАНИЕ

К.С.Султанов, М.М.Мирсаидов, А.Нуьмонов, З.Уразмухамедова. Напряженное состояние Кызылсайской грунтовой плиты под действием статических нагрузок	3
М.К.Усаров, Д.К.Шамсиев, Ф.А.Усанов. Продольные колебания многоэтажного здания с пространственным фундаментом на основе континуальной пластинчатой пространственной модели	11
З.Сирожидинов, Х.А.Гуломова. Вероятностно-статистический анализ результатов испытаний прочности бетона.....	21
К.Мамасолиев, Э.А.Исмоилов. Математическое моделирование продольно-радиальных колебаний трансверсально-изотропных цилиндрических оболочек, нестационарно взаимодействующих с внутренней вязкой жидкостью.....	30
Ш.И.Норматов. Определение минимального коэффициента устойчивости откосов грунтовых плотин методом кругло-цилиндрической поверхности скольжения с применением автоматизированного алгоритма нахождения центра окружности.....	38
А.Э.Кудратов. Устойчивость упругого стержня с гасителями колебаний при поперечных колебаниях.....	47
Ф.А.Усанов. Оценка напряженно-деформированного состояния пластины под действием касательных нагрузок на основе бимоментной теории.....	54
Б.Х.Хужаёров, Ж.Р.Туйгунов. Задача аномальной фильтрации жидкости в кусочно-неоднородной пористой среде.....	60
С.Худайкулов, Ж.Каниев, А.Абдувахобов. Многофазные волны при взаимодействии дисперсных смесей с турбулентными потоками и их применение.....	71
М.Е.Мадалиев. Численный анализ 3d крыла Onera M6 на основе моделей турбулентности SA и SST.....	76
Д.С. Яхшибаев. Динамика перемешивания стратифицированных потоков туямуянского водохранилища.....	82
Т.Р.Пулатов, Ж.А.Умрзоков. Математическое моделирование движения жидкости в гидроаккумуляторе гидрорекуперационной тормозной системы.....	86
Г.А.Юсупходжаева, Д.С.Бекчанова. Технология по производству смесовой пряжи из вторичных отходов натурального шелка.....	91
Ш.Т.Равутов. Обоснование параметров зубчатого привода хлопкоуборочного аппарата, оснащенного малогабаритными эллиптическими барабанами	96
О.С. Норкузиев. Расчетный анализ процесса съема хлопка со шпинделей хлопкоуборочных машин.....	103
Л.Э.Турсунбоев. Определение сил реакции опор прижимного устройства шлифовальной машины.....	110
Абдукаримов А., Рахмонов Х.Н. Синтез комбинированных зубчато-рычажных дифференциальных передаточных механизмов.....	117
Д.М.Мухаммадиев, Х.А.Ахмедов, Б.Х.Примов, О.Х.Абзоиров. Экспериментальное исследование привода пильного волоконотделителя с семяотводящим устройством.....	130

MUNDARIJA

К.С.Султанов, М.М.Мирсаидов, А.Ну'монов, З.Уразмухамедова. Qizilsoy gruntli to'g'onining statik kuchlar ta'sirida kuchlanishini baholash.....	3
М.К.Усаров, Ф.А.Усанов, Д.К.Шамсиев. Kontinual plastinali fazoviy model asosida fazoviy poydevorga ega ko'p qavatli binoning bo'ylama tebranishlari	11
З.Сирожидинов, Х.А.Гуломова. Beton mustahkamligi sinovlari natijalarining ehtimollik-statistik tahlili.....	21
К.Мамасолиев, Э.А.Исмоилов. Ichki qovushoq suyuqlik bilan o'zaro nostatsionar ta'sirlashuvchi transversal-izotrop silindrik qobiqning bo'ylama-radial tebranishlarini matematik modellashtirish	30
Ш.И.Норматов. Aylana markazini avtomatlashtirilgan aniqlash algoritmini qo'llab, gruntli to'g'on qiyaliklari ustuvorligini minimal ustuvorlik koeffitsiyentini doiraviy-silindrik siljish sirti usuli bilan aniqlash	38
А.Э.Кудратов. Dinamik so'ndirgichlar o'rnatilgan elastik sterjenning ko'ndalang tebranishlari ustuvorligi.....	47
Ф.А.Усанов. Bimoment nazariyasi asosida urinma yuklar ta'siridagi plastinaning kuchlanganlik-deformatsiyalanganlik holatini baholash.....	54
Б.Хужайоров, Ж.Р.Туйгунов. Bo'lakli bir jinsli bo'lmagan g'ovak muhitda suyuqliklarning anomal sizish masalasi.....	60
С.Худайкулов, Ж.Каниев, А.Абдувахобов. Dispers aralashmalar turbulent oqimlar bilan o'zaro ta'sirlashganda ko'p fazali to'lqinlar va ularning qo'llanilishi.....	71
М.Е.Мадалиев. SA va SST turbulent modeli asosida Onera M6 3D qanotining sonli tahlili	76
Д.С. Яхшибойев. Tuyamuyun suv omboridagi qatlamli oqimlar dinamika aralashishi.....	82
Т.Р.Пулатов, Ж.А.Умрзоков. Hidroreperativ tormoz tizimidagi gidroakkumulyator ichidagi suyuqlik harakatini matematik modellashtirish	86
Г.А.Юсупходжаева, Д.С.Бекчанова. Tabiiy ipakning ikkilamchi chiqindilaridan aralash yigirilgan ip ishlab chiqarish texnologiyasi	91
Ш.Т.Равутов. Kichik gabaritli elliptik barabanlar bilan jihozlangan paxta terish apparati tishli yuritmasi parametrlarini asoslash ...	96
О.С.Норкузиев. Paxta terim mashinalarining shpindel yuzasidagi paxta o'ramidan tozalash jarayonining hisobiy tahlili.....	103
Л.Э.Турсунбоев. Jilvirlash mashinasi uzatuvchi qurilmasining tayanchlaridagi reaksiya kuchlarini tadqiq qilish.....	110
А.Абдукаримов, Х.Н.Рахмонов. Kombinatsiyalangan tishli-richagli differensial uzatish mexanizmlarini sintez qilish.....	117
Д.М.Мухаммадиев, Х.А.Ахмедов, Б.Х.Примов, О.Х.Абзоиров. Chigiti chiqaruvchi qurilmali arrali tola ajratgich harakat uzatish tizimining eksperimental tadqiqoti.....	130