Uzbek Journal "Problems of Mechanics"

научная статья

DOI: 10.68846/pmjournal-2026-37-00001

Решение задачи о стабилизации заданного положения и программного движения антропоморфной руки робота

А.А. Ахматов [1*]

[1] Навоийский государственный университет, Навои, 210100, Узбекистан

[*] **Автор для корреспонденции:** aaakhmatov94@gmail.com

Поступила: 13 июня 2026 | **Доработана:** 15 августа 2026 | **Принята:** 05 сентября 2026 | **Опубликована:** 30 сентября 2026

АННОТАЦИЯ

Рассматривается трёхзвенная антропоморфная рука робота, движущаяся в вертикальной плоскости с учётом вязкого трения в шарнирах. Решаются задачи стабилизации заданного положения и программного движения при условии, что измеряются только углы поворота звеньев. Для стабилизации положения предложен нелинейный ПИ-регулятор с обратной связью по синусам половинных углов ошибки. С помощью функций Ляпунова получены явные условия на коэффициенты усиления и коэффициент диссипации, при которых положение стабилизируется при любых начальных отклонениях. Для кусочно-постоянного дискретного управления найдена оценка допустимого шага дискретизации. Для отслеживания программного движения построен закон управления с динамическим фильтром, который заменяет измерение скоростей. Доказано, что при выполнении найденных условий ошибка отслеживания стремится к нулю по модулю 2π при любых начальных условиях. Результаты подтверждены численным моделированием.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

антропоморфная рука робота, манипулятор, стабилизация, программное движение, уравнения Лагранжа, нелинейный ПИ-регулятор, управление без измерения скоростей, динамический фильтр, дискретное управление, функция Ляпунова.

Solving the problem of stabilizing a given position and programmed motion of an anthropomorphic robotic arm

Azizbek A.Akhmatov [1*]

[1] Navoi State University, Navoi, 210100, Uzbekistan

[*] **Corresponding author:** aaakhmatov94@gmail.com

ABSTRACT

A three-link anthropomorphic robotic arm moving in a vertical plane with viscous friction in the joints is considered. The problems of stabilizing a given position and a programmed motion are solved under the condition that only the joint angles are measured. For position stabilization, a nonlinear PI controller with feedback on the signs of half the error angles is proposed. Using Lyapunov functions, explicit conditions on the gains and the damping coefficient are obtained under which the position is stabilized for any initial deviations. For piecewise-constant sampled-data control, a bound on the admissible sampling period is found. For tracking a programmed motion, a control law with a dynamic filter replacing velocity measurement is constructed. It is proved that, under the conditions found, the tracking error tends to zero modulo 2π for any initial conditions. The results are confirmed by numerical simulation.

KEYWORDS

anthropomorphic robotic arm, manipulator, stabilization, programmed motion, Lagrange equations, nonlinear PI controller, velocity-free control, dynamic filter, sampled-data control, Lyapunov function.

1. Введение

Многозвенные манипуляторы входят в состав большинства робототехнических систем [1, 2]. Для них остаётся актуальной задача стабилизации положений и программных движений при неполном измерении состояния, прежде всего без измерения скоростей, поскольку сигналы датчиков скорости зашумлены, а численное дифференцирование измеренных положений усиливает помехи [3–5]. Для стабилизации положения без измерения скоростей в [6] предложено заменить скорость выходом линейного фильтра положений, а в [7] построена схема регулятор–наблюдатель, основанная на пассивности. В последние годы для манипуляторов с неопределёнными параметрами предложены адаптивные нейросетевые законы, в которых скорость оценивается наблюдателем расширенного состояния и учитываются ограничения на управление [8], а также робастные адаптивные законы для систем с трением и переменной нагрузкой [9]. В работах [10–13] при отслеживании траекторий по измерениям одних положений использовалось то, что углы поворота звеньев являются циклическими координатами, и обратная связь строилась по периодическим функциям ошибки.

В работе [14] рассмотрена стабилизация установившихся движений механических систем с циклическими координатами. Динамика в ней записана в форме уравнений Рауса, и для широкого класса голономных систем построено дискретное управление без

измерения скоростей. В работе [15] для систем, описываемых уравнениями Лагранжа, предложены дискретные законы управления с потенциальными функциями и интегральными корректирующими слагаемыми. С помощью прямого метода Ляпунова и предельных систем там доказано, что каждое ограниченное движение неограниченно приближается к одному из положений равновесия. Обе работы носят теоретический характер, условия в них сформулированы для общего класса систем, и численная проверка не проводилась.

Настоящая статья развивает результаты [14, 15] для трёхзвенной руки с вязким трением в шарнирах. Для непрерывного ПИ-регулятора и для дискретного управления ограниченность движений не предполагается, а доказывается. Глобальная стабилизация нелинейных систем общего вида по выходу при дискретных измерениях исследовалась, например, в [16]. В настоящей работе допустимый шаг дискретизации выражен явно через коэффициент диссипации, гравитационные параметры и коэффициенты усиления. Для отслеживания программного движения предложен закон управления с динамическим фильтром положений. В [10] скорость в нелинейном ПД-регуляторе заменялась запаздывающей обратной связью, и устойчивость исследовалась для функционально-дифференциального уравнения с помощью функционала Ляпунова со знакопостоянной производной. В настоящей работе вместо запаздывания используется фильтр, замкнутая система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, а условия сходимости получены в явном виде. Обратная связь строится по синусам половинных углов ошибки, что обеспечивает сходимость ошибки к нулю по модулю 2π при любых начальных условиях. Платой за это является условие, при котором диссипация в шарнирах должна превосходить кориолисово воздействие вдоль программного движения. Результаты подтверждены численным моделированием.

2. Математическая модель

Рассмотрим антропоморфную руку робота, изображённую на рис. 1.

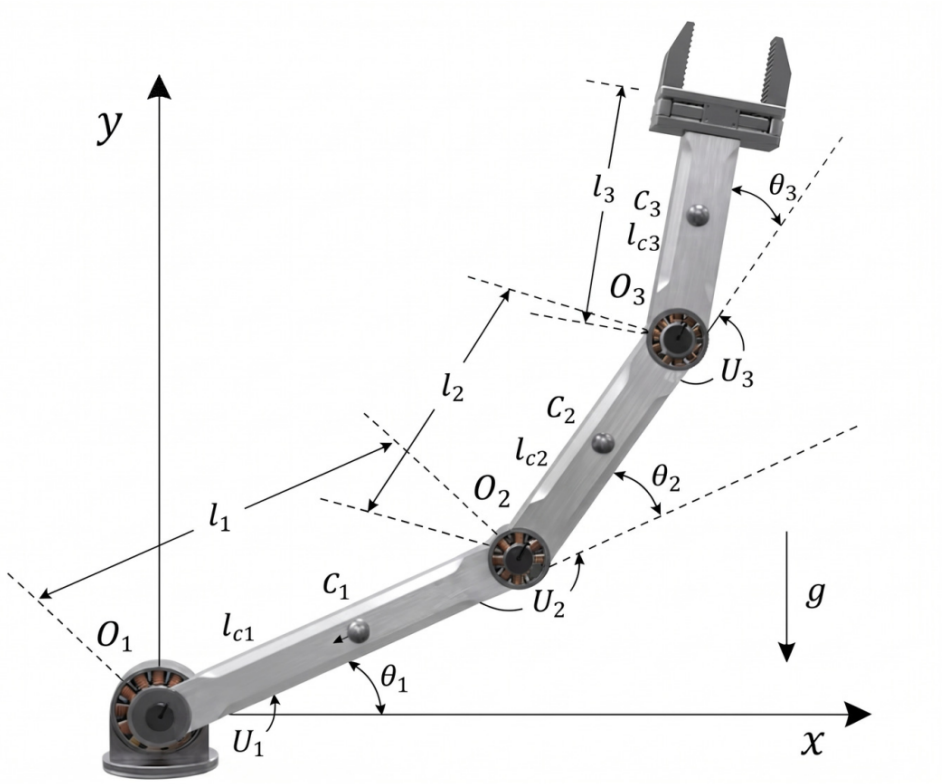


Рисунок 1. Антропоморфная рука робота

Рука моделируется тремя абсолютно твёрдыми звеньями, соединёнными цилиндрическими шарнирами. Шарнир O_1 неподвижен, движение происходит в вертикальной плоскости O_1xy, ось O_1y направлена вверх. Положение руки задаётся углом θ_1 между первым звеном и осью O_1x и углами θ_2, θ_3 поворота второго и третьего звеньев относительно предыдущих. Через m_i и l_i обозначены масса и длина звена i, через l_{ci} расстояние от шарнира O_i до центра масс C_i звена, через I_i момент инерции звена относительно оси, проходящей через C_i перпендикулярно плоскости движения.

Обозначим абсолютные угловые скорости звеньев $\omega_1 = \dot\theta_1$, $\omega_2 = \dot\theta_1 + \dot\theta_2$, $\omega_3 = \dot\theta_1 + \dot\theta_2 + \dot\theta_3$. Кинетическая энергия равна $T = T_1 + T_2 + T_3$, где

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(I_1 + m_1 l_{c1}^2\right)\omega_1^2, \qquad T_2 = \frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\omega_1^2 + l_{c2}^2\omega_2^2 + 2l_1 l_{c2}\omega_1\omega_2\cos\theta_2\right) + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2,$$

$$T_3 = \tfrac{1}{2}m_3(\quad l_1^2\omega_1^2 + l_2^2\omega_2^2 + l_{c3}^2\omega_3^2 + 2l_1 l_2\omega_1\omega_2\cos\theta_2$$
$$+2l_1 l_{c3}\omega_1\omega_3\cos(\theta_2+\theta_3) + 2l_2 l_{c3}\omega_2\omega_3\cos\theta_3) + \tfrac{1}{2}I_3\omega_3^2.$$

Потенциальная энергия сил тяжести имеет вид

$$\Pi = \gamma_1\sin\theta_1 + \gamma_2\sin(\theta_1+\theta_2) + \gamma_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3),$$

где $\gamma_1 = g\,(m_1 l_{c1} + (m_2 + m_3)\,l_1)$, $\gamma_2 = g\,(m_2 l_{c2} + m_3 l_2)$, $\gamma_3 = g m_3 l_{c3}$. Гравитационные моменты $M = -\partial\Pi/\partial\theta$ равны

$$\begin{aligned} M_1 &= -\gamma_1 \cos\theta_1 - \gamma_2 \cos(\theta_1+\theta_2) - \gamma_3 \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\,, \\ M_2 &= -\gamma_2 \cos(\theta_1+\theta_2) - \gamma_3 \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\,, \qquad M_3 = -\gamma_3 \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\,. \end{aligned}$$

Трение в шарнирах учитывается диссипативной функцией Рэлея $R = \frac{1}{2}\dot\theta^T D\dot\theta$ с симметричной положительно определённой матрицей D. Наименьшее собственное значение этой матрицы обозначим через $d > 0$.

Уравнения Лагранжа второго рода принимают вид

$$A(\theta)\ddot\theta + C\left(\theta,\dot\theta\right)\dot\theta + D\dot\theta = M(\theta) + U, \tag{1}$$

где $U = (U_1, U_2, U_3)^T$ — моменты, приложенные в шарнирах O_1, O_2, O_3. Элементы матрицы инерции $A(\theta)$ равны

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha_1 + 2\beta_1\cos\theta_2 + 2\beta_2\cos(\theta_2+\theta_3) + 2\beta_3\cos\theta_3, \\ a_{12} &= a_{21} = \alpha_2 + \beta_1\cos\theta_2 + \beta_2\cos(\theta_2+\theta_3) + 2\beta_3\cos\theta_3, \\ a_{13} &= a_{31} = \alpha_3 + \beta_2\cos(\theta_2+\theta_3) + \beta_3\cos\theta_3, \\ a_{22} &= \alpha_2 + 2\beta_3\cos\theta_3, \qquad a_{23} = a_{32} = \alpha_3 + \beta_3\cos\theta_3, \qquad a_{33} = \alpha_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= I_1 + I_2 + I_3 + m_1 l_{c1}^2 + m_2\left(l_1^2 + l_{c2}^2\right) + m_3\left(l_1^2 + l_2^2 + l_{c3}^2\right), \\ \alpha_2 &= I_2 + I_3 + m_2 l_{c2}^2 + m_3\left(l_2^2 + l_{c3}^2\right), \qquad \alpha_3 = I_3 + m_3 l_{c3}^2, \\ \beta_1 &= l_1\,(m_2 l_{c2} + m_3 l_2)\,, \qquad \beta_2 = m_3 l_1 l_{c3}, \qquad \beta_3 = m_3 l_2 l_{c3}. \end{aligned}$$

Элементы матрицы $C\left(\theta,\dot\theta\right)$ выражаются через символы Кристоффеля первого рода

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{3}\Gamma_{ijk}\dot\theta_i, \qquad \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial\theta_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial\theta_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial\theta_k}\right).$$

Положив $h_1 = \beta_1\sin\theta_2 + \beta_2\sin(\theta_2+\theta_3)$, $h_2 = \beta_2\sin(\theta_2+\theta_3) + \beta_3\sin\theta_3$, $h_3 = \beta_3\sin\theta_3$, получим

$$C\left(\theta,\dot\theta\right) = \begin{pmatrix} -h_1\dot\theta_2 - h_2\dot\theta_3 & -h_1\left(\dot\theta_1+\dot\theta_2\right) - h_2\dot\theta_3 & -h_2\left(\dot\theta_1+\dot\theta_2+\dot\theta_3\right) \\ h_1\dot\theta_1 - h_3\dot\theta_3 & -h_3\dot\theta_3 & -h_3\left(\dot\theta_1+\dot\theta_2+\dot\theta_3\right) \\ h_2\dot\theta_1 + h_3\dot\theta_2 & h_3\left(\dot\theta_1+\dot\theta_2\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Выражения для A, C и M проверены символьными вычислениями непосредственным составлением уравнений Лагранжа. Ниже используются следующие свойства модели.

1°. Матрица $A(\theta)$ симметрична, и существуют числа $0 < \lambda_A \le \Lambda_A$, для которых $\lambda_A|v|^2 \le v^T A(\theta)v \le \Lambda_A|v|^2$ при всех θ, v.

2°. Матрица $\dot A(\theta) - 2C\left(\theta,\dot\theta\right)$ кососимметрична.

3°. $C(\theta,u)v = C(\theta,v)u$ для всех $u, v \in \mathbb{R}^3$, что следует из симметрии $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$.

4°. $\left|u^T C(\theta,v)u\right| \le \kappa_C|v|\,|u|^2$, где $\kappa_C = \frac{1}{2}\max_{\theta,\,|v|=1} \parallel \sum_k \frac{\partial A}{\partial\theta_k}(\theta)v_k \parallel$. Это вытекает из свойства 2°, так как $u^T C(\theta,v)u = \frac{1}{2}u^T\left(\sum_k \frac{\partial A}{\partial\theta_k}v_k\right)u$. Из оценок $|h_1| \le \beta_1 + \beta_2$, $|h_2| \le \beta_2 + \beta_3$, $|h_3| \le \beta_3$ получаем $\kappa_C \le 2\sqrt{6}\ (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$.

5°. $|M(\theta) - M(\vartheta)| \le L_M|\theta - \vartheta|$, где $L_M = \gamma_1 + 2\gamma_2 + 3\gamma_3$. Действительно, $\partial M/\partial\theta = \sum_{j=1}^{3}\gamma_j \sin\left(\theta_1 + \ldots + \theta_j\right)\, u_j u_j^T$, где у вектора u_j первые j компонент равны единице, а остальные нулю, и $\parallel u_j u_j^T \parallel = j$.

Конфигурация руки является точкой тора $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$. Ошибки $x_i = \theta_i - \theta_i^0$ будем рассматривать как вещественные переменные, что соответствует многооборотным датчикам угла, и строить обратную связь по вектору

$$\sigma(x) = (sin\frac{x_1}{2}, sin\frac{x_2}{2}, sin\frac{x_3}{2})^T, \qquad J(x) = \frac{\partial\sigma}{\partial x} = diag\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x_i}{2}\right).$$

Функция $\sin(x_i/2)$ имеет период 4π и обращается в нуль только при $x_i \in 2\pi\mathbb{Z}$, т.е. в точках, отвечающих заданному положению звена. Поэтому построенные ниже замкнутые системы 4π-периодичны по x, их можно рассматривать на множестве $(\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z})^3$, компактном по x, и все их положения равновесия соответствуют одной и той же конфигурации руки θ^0. Непрерывная обратная связь, заданная на торе, не может обеспечить глобальную асимптотическую устойчивость по топологическим причинам, а переход к $x \in \mathbb{R}^3$ снимает это препятствие.

Определение. Будем говорить, что управление решает задачу *нелокальной стабилизации*, если состояние $x = 0$, $\dot x = 0$ вместе с нулевым состоянием регулятора асимптотически устойчиво и при любых начальных условиях $\dot x(t) \to 0$, $x(t) \to x^*$ для некоторого $x^* \in 2\pi\mathbb{Z}^3$, т.е. $\theta(t) \to \theta^0\ (mod\ 2\pi)$.

3. Стабилизация заданного положения

Пусть θ^0 — заданное положение руки и $x = \theta - \theta^0$. Рассмотрим нелинейный ПИ-регулятор

$$U = -M(\theta) - K\sigma(x) - Pz, \qquad \dot z = -Sz + \sigma(x), \quad z(0) = z_0, \tag{2}$$

где $K = diag\,(k_i)$, $P = diag\,(p_i)$, $S = diag\,(s_i)$. При $z_0 = 0$ имеем $z_i(t) = \int_0^t e^{s_i(\tau-t)}\sin\frac{x_i(\tau)}{2}\,d\tau$, так что (2) совпадает с регулятором $U_i = -M_i(\theta) - k_i\sin\frac{x_i}{2} - p_i\int_0^t e^{s_i(\tau-t)}\sin\frac{x_i(\tau)}{2}\,d\tau$. Регулятор использует только измерения углов, поскольку и компенсация $-M(\theta)$ вычисляется по положению.

Теорема 1. *Пусть $p_i > 0$, $s_i > 0$ и*

$$k_i + \frac{p_i}{s_i} > 0 \quad (i = 1, 2, 3), \qquad d > \max_i \frac{p_i}{2s_i^2}. \tag{3}$$

Тогда регулятор (2) решает задачу нелокальной стабилизации положения θ^0 системы (1).

Доказательство. Замкнутая система имеет вид $A\ddot{x}+C\dot{x}+D\dot{x} = -K\sigma(x)-Pz$. Положим $\zeta = z-S^{-1}\sigma(x)$. Тогда $\dot{\zeta} = -S\zeta-S^{-1}J(x)\dot{x}$ и $-K\sigma - Pz = -\left(K + PS^{-1}\right)\sigma(x) - P\zeta$. Рассмотрим функцию

$$V = \frac{1}{2}\dot{x}^T A(\theta)\dot{x} + \sum_{i=1}^{3} 4\left(k_i + \frac{p_i}{s_i}\right)\sin^2\frac{x_i}{4} + \sum_{i=1}^{3} s_i p_i \zeta_i^2.$$

Поскольку $\frac{d}{dt}\,4\sin^2\frac{x_i}{4} = sin\frac{x_i}{2}\,\dot{x}_i$, с учётом свойства 2° получаем

$$\dot{V} = -\dot{x}^T D\dot{x} - \sum_{i=1}^{3}\left(2s_i^2 p_i\zeta_i^2 + p_i\left(1 + cos\frac{x_i}{2}\right)\dot{x}_i\zeta_i\right) \le -\sum_{i=1}^{3}\left(d\,\dot{x}_i^2 - 2p_i\,|\dot{x}_i|\,|\zeta_i| + 2s_i^2 p_i\zeta_i^2\right).$$

Квадратичные формы в правой части отрицательно определены, если $8ds_i^2 p_i > 4p_i^2$, что совпадает со вторым условием (3). Значит, $\dot{V} \le -\mu\left(|\dot{x}|^2 + |\zeta|^2\right)$ при некотором $\mu > 0$. Функция V положительно определена в окрестности нуля, откуда следует устойчивость. Решения ограничены по $\dot{x}$ и ζ, а по x система 4π-периодична, поэтому применим принцип инвариантности Ла-Салля [17]. На множестве $\dot{V} = 0$ имеем $\dot{x} \equiv 0$, $\zeta \equiv 0$, и из уравнения движения следует $\left(K + PS^{-1}\right)\sigma(x) = 0$, т.е. $x \in 2\pi\mathbb{Z}^3$. Так как функция $x(t)$ непрерывна, а множество $2\pi\mathbb{Z}^3$ дискретно, $x(t) \to x^* \in 2\pi\mathbb{Z}^3$. Минимум V по x достигается при $x \in 4\pi\mathbb{Z}^3$, поэтому равновесие $x = 0$ асимптотически устойчиво. □

Замечание 1. Первое условие (3) означает положительность статической жёсткости регулятора и выполняется, например, при любых $k_i \ge 0$. Оно существенно, так как при $k_i + p_i/s_i < 0$ функция $4\,(k_i + p_i/s_i)\sin^2(x_i/4)$ имеет максимум при $x_i = 0$ и равновесие неустойчиво. Сверху коэффициенты k_i не ограничены, а гравитационные параметры в условия не входят, поскольку сила тяжести компенсируется по измеренному положению. Второе условие (3) также существенно. Интегральная составляющая уменьшает эффективное демпфирование, и при малой диссипации равновесие может потерять устойчивость. Для параметров раздела 5 и $\theta^0 = 0$ линеаризованная система неустойчива уже при $d \approx 0{,}1$ Н·м·с/рад, тогда как (3) требует $d > 0{,}4$ Н·м·с/рад. Слагаемое Pz представляет собой экспоненциально взвешенный интеграл от $\sigma(x)$. В установившемся режиме оно добавляет к жёсткости регулятора величину p_i/s_i, но, в отличие от слагаемого $K\sigma(x)$, действует через фильтр и поэтому менее чувствительно к помехам измерения углов. Постоянные возмущения оно не устраняет, так как при $s_i > 0$ не является интегратором в точном смысле, а переход к $s_i = 0$ несовместим с условием (3).

Рассмотрим теперь кусочно-постоянное управление с шагом дискретизации $T > 0$

$$U(t) = -M\left(\theta(nT)\right) - K\sigma\left(x(nT)\right), \qquad t \in [nT, (n+1)T), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4}$$

которое использует измерения углов только в моменты nT.

Теорема 2. *Пусть* $k_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $k_{\max} = \max_i k_i$ *и*

$$T\left(L_M + \frac{k_{\max}}{2}\right) < 2d. \tag{5}$$

Тогда управление (4) решает задачу нелокальной стабилизации положения θ^0 системы (1).

Доказательство. Обозначим $\theta_n = \theta(nT)$, $x_n = x(nT)$, $L_\Delta = L_M + k_{\max}/2$. На промежутке $[nT, (n+1)T)$ запишем (4) в виде $U = -M(\theta) - K\sigma(x) + \Delta(t)$, где $\Delta = M(\theta) - M(\theta_n) + K\left(\sigma(x) - \sigma(x_n)\right)$. Из свойства 5° и неравенства $\left|\sin\frac{a}{2} - sin\frac{b}{2}\right| \le \frac{1}{2}|a-b|$ следует

$$|\Delta(t)| \le L_\Delta\,|x(t) - x_n| \le L_\Delta \int_{nT}^{t} |\dot{x}(\tau)|\,d\tau.$$

Для функции $V = \frac{1}{2}\dot{x}^T A(\theta)\dot{x} + \sum_{i=1}^{3} 4k_i\sin^2\frac{x_i}{4}$ с учётом свойства 2° имеем

$$\dot{V} = -\dot{x}^T D\dot{x} + \dot{x}^T\Delta \le -d\,|\dot{x}|^2 + L_\Delta\,|\dot{x}(t)| \int_{nT}^{t} |\dot{x}(\tau)|\,d\tau.$$

Проинтегрируем это неравенство по $[nT, t]$, $t \le (n+1)T$. Поскольку двойной интеграл от правой части равен $\frac{1}{2}L_\Delta(\int_{nT}^{t}|\dot{x}|\,d\tau)^2$, по неравенству Коши–Буняковского получаем

$$V(t) - V(nT) \le -\left(d - \frac{L_\Delta T}{2}\right)\int_{nT}^{t} |\dot{x}(\tau)|^2\,d\tau \le 0. \tag{6}$$

В силу (5) $d - L_\Delta T/2 > 0$, поэтому $V(t) \le V(nT) \le V(0)$ при всех $t \ge 0$, и из положительной определённости V следует устойчивость. Кроме того, $\dot{x}$ ограничена, $\int_0^\infty |\dot{x}|^2\,dt < \infty$, а $\ddot{x}$ ограничена в силу (1). По лемме Барбалата [17] $\dot{x}(t) \to 0$. Интегрируя уравнение движения по $[nT, (n+1)T]$, получаем

$$\begin{aligned} &A(\theta_n)\left(\dot{x}\left((n+1)T\right) - \dot{x}(nT)\right) + \textstyle\int_{nT}^{(n+1)T}\left(A(\theta) - A(\theta_n)\right)\ddot{x}\,dt = \\ &= \textstyle\int_{nT}^{(n+1)T}\left(-C\left(\theta, \dot{\theta}\right)\dot{x} - D\dot{x} + M(\theta) - M(\theta_n)\right)dt - TK\sigma(x_n). \end{aligned}$$

При $n \to \infty$ все слагаемые, кроме последнего, стремятся к нулю, так как $\dot{x} \to 0$, $|\theta(t) - \theta_n| \le T\sup_{[nT,(n+1)T]}|\dot{x}| \to 0$ и $\ddot{x}$ ограничена. Следовательно, $\sigma(x_n) \to 0$. Поскольку $|x(t) - x_n| \to 0$, расстояние от $x(t)$ до множества $2\pi\mathbb{Z}^3$ стремится к нулю, и в силу непрерывности $x(t) \to x^* \in 2\pi\mathbb{Z}^3$. Вместе с устойчивостью это означает асимптотическую устойчивость. □

Замечание 2. Из (5) следует явная оценка шага $T^* = 2d/(L_M + k_{\max}/2)$. При дискретном управлении коэффициенты k_i

ограничены сверху, так как их увеличение требует уменьшения шага, а при $d = 0$ условие (5) невыполнимо. Строгое неравенство $k_i > 0$ здесь необходимо, потому что в законе (4) нет интегральной составляющей, которая в теореме 1 обеспечивала жёсткость. Для параметров раздела 5 оценка даёт $T^* \approx 0{,}061$ с. Моделирование показывает, что сходимость сохраняется при $T = 0{,}08$ с и теряется при $T = 0{,}1$ с, т.е. оценка (5) занижает допустимый шаг не более чем в 1,7 раза.

4. Стабилизация программного движения

Пусть $\theta^0(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемое программное движение, для которого $\left|\dot\theta^0(t)\right| \le v^0$ и $\left|\ddot\theta^0(t)\right|$ ограничена при $t \ge 0$. Положим $x = \theta - \theta^0(t)$. Вместо измерения скоростей используем динамический фильтр

$$\dot w_i = -a_i\left(w_i + b_i\dot x_i + c_i \sin\frac{x_i}{2}\right), \qquad a_i, b_i, c_i > 0, \quad i = 1,2,3. \tag{7}$$

Производная $\dot x$ в (7) не измеряется. Для переменной $\eta_i = w_i + a_i b_i x_i$ фильтр принимает вид

$$\dot\eta_i = -a_i\left(\eta_i - a_i b_i x_i + c_i \sin\frac{x_i}{2}\right), \qquad w_i = \eta_i - a_i b_i x_i,$$

и реализуется по измерениям одних углов. Закон управления возьмём в виде

$$U = A(\theta)\ddot\theta^0 + C\left(\theta,\dot\theta^0\right)\dot\theta^0 + D\dot\theta^0 - M(\theta) - K\sigma(x) + Nw, \tag{8}$$

где $K = diag\,(k_i)$, $N = diag\,(\nu_i)$. В него входят только измеряемые углы θ и известные функции θ^0, $\dot\theta^0$, $\ddot\theta^0$.

Теорема 3. *Пусть $\nu_i > 0$, $k_i + \nu_i c_i > 0$ $(i = 1,2,3)$ и число $\delta = d - \kappa_C v^0$ удовлетворяет условию*

$$\delta > \max_i \frac{\nu_i c_i^2}{16 a_i^2 b_i}. \tag{9}$$

Тогда при управлении (7), (8) состояние $x = 0$, $\dot x = 0$, $w = 0$ асимптотически устойчиво и при любых начальных условиях $\dot x(t) \to 0$, $w(t) \to 0$, $x(t) \to x^* \in 2\pi\mathbb{Z}^3$.

Доказательство. Из свойства 3° имеем $C\left(\theta,\dot\theta\right)\dot\theta - C\left(\theta,\dot\theta^0\right)\dot\theta^0 = C\left(\theta,\dot\theta\right)\dot x + C\left(\theta,\dot\theta^0\right)\dot x$, и уравнение ошибки принимает вид

$$A(\theta)\ddot x + C\left(\theta,\dot\theta\right)\dot x + C\left(\theta,\dot\theta^0\right)\dot x + D\dot x = -K\sigma(x) + Nw.$$

Положим $e = w + \Gamma\sigma(x)$, $\Gamma = diag\,(c_i)$. Из (7) находим $\dot e_i = -a_i e_i - \left(a_i b_i - \frac{1}{2}c_i\cos\frac{x_i}{2}\right)\dot x_i$, кроме того, $-K\sigma + Nw = -(K + N\Gamma)\sigma(x) + Ne$. Рассмотрим функцию

$$V = \frac{1}{2}\dot x^T A(\theta)\dot x + \sum_{i=1}^{3} 4\,(k_i + \nu_i c_i)\sin^2\frac{x_i}{4} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\nu_i}{2a_i b_i}e_i^2.$$

С учётом свойств 2° и 4° получаем

$$\dot V = -\dot x^T\left(D + C\left(\theta,\dot\theta^0\right)\right)\dot x - \sum_{i=1}^{3}\frac{\nu_i}{b_i}e_i^2 + \sum_{i=1}^{3}\frac{\nu_i c_i}{2a_i b_i}\cos\frac{x_i}{2}\dot x_i e_i \le -\sum_{i=1}^{3}\left(\delta\dot x_i^2 - \frac{\nu_i c_i}{2a_i b_i}|\dot x_i|\,|e_i| + \frac{\nu_i}{b_i}e_i^2\right).$$

При условии (9) правая часть не превосходит $-\mu\left(|\dot x|^2 + |e|^2\right)$ при некотором $\mu > 0$. Функция V положительно определена и допускает бесконечно малый высший предел в окрестности нуля, откуда следует устойчивость. Так как V не возрастает, функции $\dot x$, e, w ограничены и $\int_0^\infty\left(|\dot x|^2 + |e|^2\right)dt < \infty$. Из уравнения ошибки и ограниченности $\dot\theta^0$, $\ddot\theta^0$ следует ограниченность $\ddot x$, $\dot e$ и производной от $\ddot x$. По лемме Барбалата [17] $\dot x \to 0$, $e \to 0$ и $\ddot x \to 0$. Тогда из уравнения ошибки $(K + N\Gamma)\sigma\left(x(t)\right) \to 0$, откуда, как и выше, $x(t) \to x^* \in 2\pi\mathbb{Z}^3$ и $w = e - \Gamma\sigma(x) \to 0$. Вместе с устойчивостью это даёт асимптотическую устойчивость. □

Замечание 3. Условие (9) требует, чтобы диссипация в шарнирах превосходила кориолисово воздействие $\kappa_C v^0$ вдоль программного движения. Для медленных программных движений оно выполняется при любом $d > 0$ за счёт выбора a_i и b_i. Ослабление этого условия в духе [10] мы оставляем для дальнейшего исследования.

Замечание 4. Если $\theta^0 = const$, $c_i = 0$ и $k_i > 0$, то $\dot V = -\dot x^T D\dot x - \sum \nu_i e_i^2/b_i$. Из $e \equiv 0$ следует $\dot x \equiv 0$, поэтому по принципу Ла-Салля стабилизация имеет место и при $D = 0$. В этом случае фильтр (7) полностью заменяет демпфирование по скорости [6].

5. Результаты численного моделирования

Параметры модели и регуляторов приведены в таблице 1, звенья приняты однородными стержнями. Матрица диссипации выбрана в виде $D = dE$ с $d = 2$ Н·м·с/рад, при этом выполняются условия всех трёх теорем. Уравнения интегрировались в MATLAB вложенным методом Рунге–Кутты четвёртого и пятого порядков с переменным шагом, относительной точностью 10^{-10} и максимальным шагом 0,01 с. При дискретном управлении интегрирование велось последовательно на промежутках $[nT, (n+1)T)$.

Параметры фильтра одинаковы для всех звеньев, $a_i = 10$, $b_i = c_i = 1$, шаг дискретизации $T = 0{,}05$ с. Начальные скорости на рис. 2 и 3 равны нулю, на рис. 4 они совпадают с $\dot\theta^0(0)$, начальные состояния регулятора и фильтра нулевые.

Для этих параметров $\max_i p_i/(2s_i^2) = 0{,}4 < d$, так что выполнено условие (3). Далее, $L_M = 35{,}32$ Н·м и $T^* \approx 0{,}061$ с, что больше $T = 0{,}05$ с. Максимизация по сетке значений θ_2, θ_3 и направлений v даёт $\kappa_C \approx 0{,}527$ кг·м², и при $v^0 \approx 0{,}594$ рад/с получаем $\delta \approx 1{,}69 > 0{,}025$, т.е. условие (9) также выполнено. На всех рассчитанных траекториях функции Ляпунова из доказательств теорем 1–3 не возрастали, а в случае дискретного управления это выполнялось как в моменты nT, так и между ними.

На рис. 2 показана стабилизация положения θ^0 регулятором (2) при больших начальных ошибках $x_1(0) = 5, x_2(0) = -4, x_3(0) = 7$ рад. Первые два звена возвращаются в положения θ_1^0 и θ_2^0, а третье звено приходит в положение $0{,}8 + 4\pi$, совпадающее с заданным.

Таблица 1. Параметры моделирования

Параметр	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
Масса m_i, кг	2,0	1,5	1,0
Длина l_i, м	0,5	0,4	0,3
Центр масс $l_{ci} = l_i/2$, м	0,25	0,2	0,15
Момент инерции $I_i = m_i l_i^2/12$, кг·м²	0,0417	0,02	0,0075
Коэффициенты k_i в (2), (4), (8)	60	30	10
Коэффициенты p_i и s_i в (2)	20 и 5	10 и 5	5 и 5
Коэффициенты ν_i в (8)	40	20	10
Заданное положение θ_i^0 (рис. 2, 3), рад	$\pi/4$	0	0,8
Начальное положение $\theta_i(0)$ (рис. 2), рад	$\pi/4 + 5$	-4	7,8
Начальное положение $\theta_i(0)$ (рис. 3), рад	1,5	0,7	1,4
Начальное положение $\theta_i(0)$ (рис. 4), рад	1,05	0,6	1,0

Это соответствует сходимости $x(t) \to x^* \in 2\pi\mathbb{Z}^3$ в теореме 1. Ошибка входит в полосу 0,02 рад около предельного положения примерно через 10 с, наибольшие управляющие моменты равны 77,9, 31,5 и 9,5 Н·м.

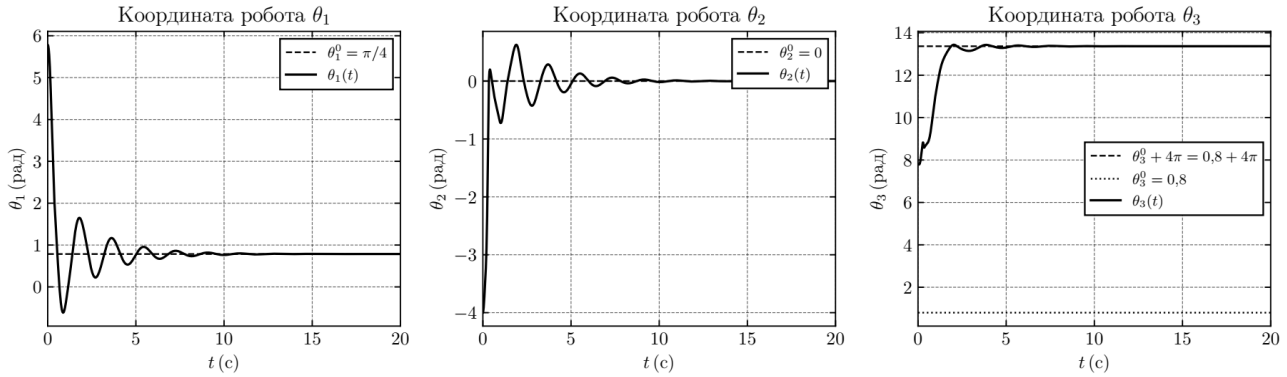


Рисунок 2. Стабилизация положения $\theta_1^0 = \pi/4$, $\theta_2^0 = 0$, $\theta_3^0 = 0{,}8$ регулятором (2) при больших начальных ошибках

На рис. 3 показана стабилизация того же положения дискретным управлением (4) при начальном положении из таблицы 1. Время установления составляет около 15 с. Переходный процесс затухает медленнее, чем при непрерывном регуляторе, потому что управление обновляется лишь в моменты nT, а демпфирование создаётся только трением в шарнирах.

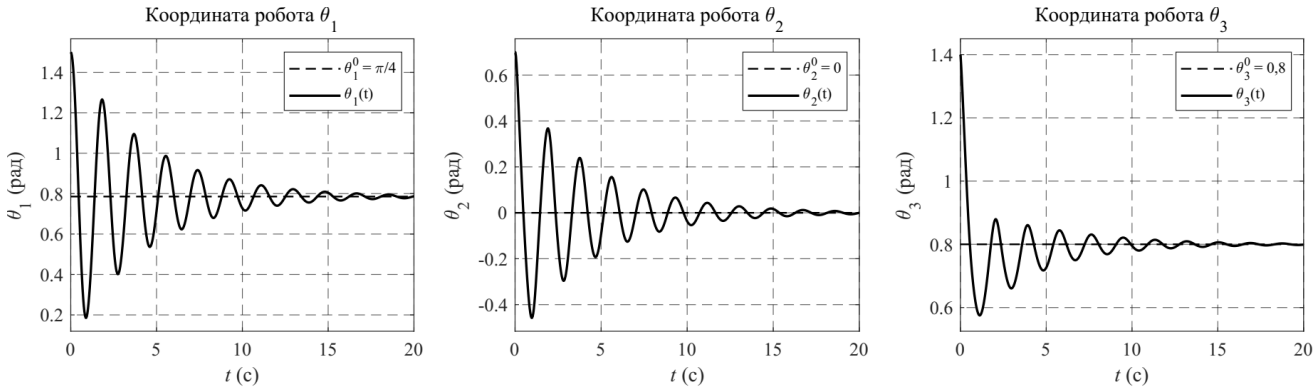


Рисунок 3. Стабилизация положения $\theta_1^0 = \pi/4$, $\theta_2^0 = 0$, $\theta_3^0 = 0{,}8$ дискретным управлением (4) с шагом $T = 0{,}05$ с

На рис. 4 показано отслеживание программного движения $\theta_1^0 = 0{,}2t$, $\theta_2^0 = 1{,}5 + sin\,(0{,}5t)$, $\theta_3^0 = 0{,}5\sin(0{,}5t)$ законом (7), (8). Для этого движения $v^0 = \sqrt{0{,}04 + 0{,}25 + 0{,}0625} \approx 0{,}594$ рад/с. Начальные ошибки равны 1,05, $-$ 0,9 и 1,0 рад. Ошибка входит в полосу 0,02 рад примерно через 4,8 с, а при $t \geq 8$ с не превосходит $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ рад.

6. Выводы

Для трёхзвенной антропоморфной руки робота с вязким трением в шарнирах решены задачи стабилизации заданного положения и программного движения по измерениям одних углов поворота звеньев. Для нелинейного ПИ-регулятора с обратной связью по синусам половинных углов ошибки получены явные условия, при которых положение стабилизируется при любых начальных отклонениях. Эти условия показывают, что интегральная составляющая уменьшает эффективное демпфирование и поэтому требует

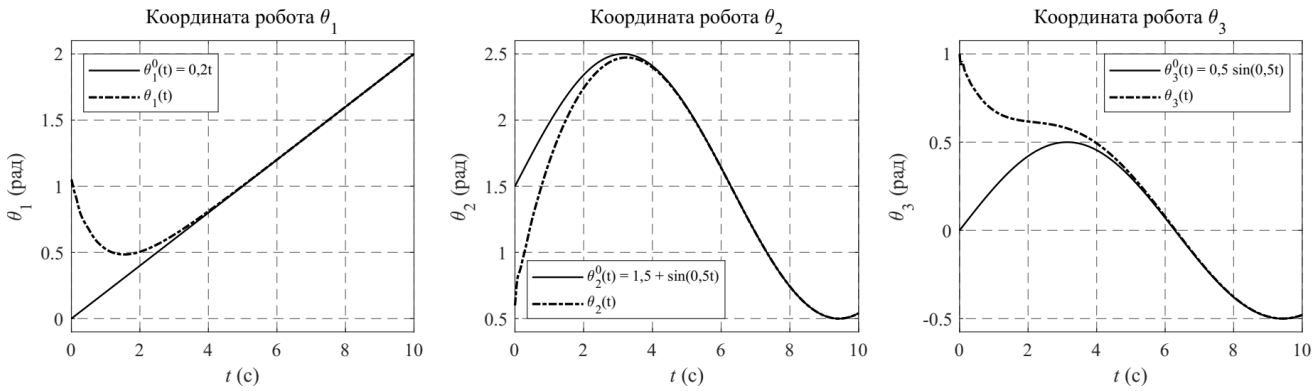


Рисунок 4. Отслеживание программного движения $\theta^0(t)$ законом (7), (8) без измерения скоростей

достаточной диссипации в шарнирах. Для кусочно-постоянного дискретного управления получена явная оценка допустимого шага дискретизации, из которой видно, что увеличение коэффициентов усиления требует уменьшения шага. Для отслеживания программного движения построен закон управления с динамическим фильтром положений и доказано, что при выполнении найденных условий ошибка стремится к нулю по модулю 2π при любых начальных условиях. В отличие от [10], где использовалась запаздывающая обратная связь, замкнутая система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, а условия сходимости записаны в явном виде. В дальнейшем предполагается ослабить требование к диссипации при отслеживании быстрых движений и исследовать влияние неточности параметров модели и ограничений на управляющие моменты.

Декларации / Declarations

Вклад авторов: А.А. Ахматов: концептуализация, методология, формальный анализ, исследование, написание и редактирование рукописи.

Author Contributions: A.A. Akhmatov: conceptualization, methodology, formal analysis, investigation, writing and editing of the manuscript.

Финансирование: Данное исследование не получало внешнего финансирования.

Funding: This research received no external funding.

Одобрение этического комитета: Не применимо.

Ethics Approval: Not applicable.

Информированное согласие и согласие на публикацию: Не применимо.

Informed Consent and Consent for Publication: Not applicable.

Доступность данных: Данные, подтверждающие результаты данного исследования, доступны у автора для корреспонденции по обоснованному запросу.

Data Availability Statement: The data supporting the findings of this study are available from the corresponding author upon reasonable request.

Конфликт интересов: Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest: The author declares no conflicts of interest.

Список литературы

[1] Kelly R, Santibáñez V, Loria A. Control of Robot Manipulators in Joint Space. Springer; 2005.

[2] Yurevich EI. Osnovy robototehniki: uchebnoe posobie [Fundamentals of robotics: a textbook]. 4th ed. BHV-Peterburg; 2018. (In Russian).

[3] Alonge F, D'Ippolito F, Raimondi FM. An adaptive control law for robotic manipulators without velocity feedback. Control Eng Pract. 2003;11(7):999–1005. https://doi.org/10.1016/S0967-0661(02)00195-8.

[4] Moreno-Valenzuela J, Camarillo K, Campa R, Santibáñez V. A practical PID regulator with bounded torques for robot manipulators. Int J Control Autom Syst. 2010;8(3):544–555. https://doi.org/10.1007/s12555-010-0307-4.

[5] Yarza A, Santibáñez V, Moreno-Valenzuela J. An adaptive output feedback motion tracking controller for robot manipulators: uniform global asymptotic stability and experimentation. Int J Appl Math Comput Sci. 2013;23(3):599–611. https://doi.org/10.2478/amcs-2013-0045.

[6] Kelly R. A simple set-point robot controller by using only position measurements. In: Proceedings of the 12th IFAC World Congress; 1993:173–176. 18–23 July 1993. https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)48783-0.

[7] Berghuis H, Nijmeijer H. A passivity approach to controller-observer design for robots. IEEE Trans Robot Autom. 1993;9(6):740–754. https://doi.org/10.1109/70.258054.

[8] Zhang H, Zhao Y, Wang Y, Liu L. Adaptive neural network control of robotic manipulators with input constraints and without velocity measurements. IET Control Theory Appl. 2024;18(10):1232–1247. https://doi.org/10.1049/cth2.12660.

[9] Noghreian E, Koofigar HR. Robust tracking control of robot manipulators with friction and variable loads without velocity measurement: a switched control strategy. Proc Inst Mech Eng Part I J Syst Control Eng. 2021;235(4):532–539. https://doi.org/10.1177/0959651820947944.

[10] Andreev AS, Peregudova OA. Trajectory tracking control for robot manipulators using only position measurements. Int J Control. 2019;92(7):1490–1496. https://doi.org/10.1080/00207179.2017.1397755.

[11] Andreev A, Peregudova O, Sutyrkina K. Trajectory tracking control of robot manipulators with revolute joints using only position measurements. In: Proceedings of the 18th International Conference on Mechatronics – Mechatronika (ME). IEEE; 2018:1–6. https://doi.org/10.1109/MECH.2018.8624755.

[12] Peregudova O. Robust trajectory tracking control for robot manipulators without velocity measurements. In: Proceedings of the 14th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE; 2018. https://doi.org/10.1109/STAB.2018.8408385.

[13] Akhmatov A, Buranov J, Khusanov J, Peregudova O. On semi-global output position feedback trajectory tracking control of a multi-link revolute joined robotic manipulator. In: Proceedings of the 25th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). IEEE; 2021:290–295.

[14] Akhmatov AA. Stabilizaciâ ustanovivšihsâ dviženij mehaničeskih sistem s cikličeskimi koordinatami diskretnym upravleniem bez izmereniâ skorostej [Stabilization of steady motions of mechanical systems with cyclic coordinates by sampled-data control without velocity measurements]. Ilm sarchashmalari ilmiy-nazariy, metodik jurnal. 2025;(10.1):39–43. (In Russian).

[15] Akhmatov AA. Diskretnaâ stabilizaciâ mehaničeskih sistem bez izmereniâ skorostej [Sampled-data stabilization of mechanical systems without velocity measurements]. Ilm sarchashmalari ilmiy-nazariy, metodik jurnal. 2026;(11):45–49. (In Russian).

[16] Chang L, Fu C, Zhang H. Global sampled-data output feedback stabilization for nonlinear systems via intermittent hold. IEEE/CAA J Autom Sin. 2025;12(8):1586–1593. https://doi.org/10.1109/JAS.2024.125019.

[17] Khalil HK. Nonlinear Systems. 3rd ed. Prentice Hall; 2002.

Отказ от ответственности / Примечание издателя

Утверждения, мнения и данные во всех публикациях принадлежат исключительно отдельным авторам и участникам и не обязательно отражают взгляды издателя, журнала или редакторов. Издатель, журнал и редакторы не несут ответственности за вред людям или ущерб имуществу, возникший вследствие использования идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в тексте.

Disclaimer of Liability/Publisher's Note

The statements, opinions, and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and do not necessarily reflect the views of the Publisher, the Journal, or the editors. The Publisher, the Journal, and the editors disclaim responsibility for any injury to persons or damage to property resulting from any ideas, methods, instructions, or products referred to in the content.