Uzbek Journal “Problems of Mechanics”

научная статья

DOI: 10.68846/pmjournal-2026-37-00004

Решение гидродинамических задач с применением универсальной консервативной схемы переноса консервативных примесей совместно с алгоритмом решения системы уравнений Навье–Стокса

М.М. Мирсаидов[1,2*], **А.Г. Савицкий**[1], **А.Т. Салохиддинов**[1]

[1] Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства», 100000, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Кары-Ниязова, д. 39

[2] Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М. Т. Уразбаева Академии Наук Республики Узбекистан, 100125, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Дурмон Йули, 33

[*] **Автор для корреспонденции:** theormir@mail.ru

Поступила: 20 июня 2026 | **Доработана:** 15 августа 2026 | **Принята:** 05 сентября 2026 | **Опубликована:** 30 сентября 2026

АННОТАЦИЯ

В статье представлены результаты по совершенствованию метода решения задачи вычислительной гидромеханики на основе алгоритма, использующего абсолютно консервативную схему переноса импульса и примесей, и при использовании явных конечно-разностных аппроксимаций. В статье показаны пути устранения ряда проблем, возникающих при решении полной системы уравнений Навье-Стокса: потеря консервативности в большинстве существующих схем при некоторых возможных конфигурациях полей скорости, отсутствие отдельного эволюционного уравнения для гидродинамического давления, вычислительные неустойчивости. В статье детально описана структура конечно-разностных аппроксимаций в цилиндрической системе координат. Предложенный подход, основанный на совместном использовании консервативной схемы переноса ТИАМЕ (разработка НИУ ТИИИМСХ) и полученного эволюционного уравнения для давления, продемонстрировал высокую устойчивость и соблюдение законов сохранения при решении достаточно сложной гидродинамической задачи. Детально исследованы процессы межкомпонентного взаимодействия с выделением тепловой энергии и их влияние на динамику потока. Верификация полученных результатов от числовой имитации экзотермической реакции потоков газов в цилиндрической области с какими-либо опытными данными не проводилась. Однако сам факт, что при использовании полных уравнений Навье-Стокса были получены стабильные распределения течения газа, объяснимые и ожидаемые полей распределения примесей и температур, дает возможность предполагать, что алгоритм расчета работоспособен и будет полезен при решении самого широкого спектра гидродинамических задач. Показано, что применение предложенного алгоритма позволяет эффективно решать сложные гидродинамические задачи без необходимости использования узкоспециализированных языков программирования и особых вычислительных комплексов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

уравнения Навье-Стокса, вычислительная гидродинамика, абсолютно консервативная схема, явные конечно-разностные аппроксимации, эволюционное уравнение давления, межкомпонентное взаимодействие, выделение тепловой энергии, схема ТИАМЕ, вычислительная вязкость.

Solving hydrodynamic problems with a universal conservative scheme for transporting conservative additives combined with a Navier–Stokes equation algorithm

Mirziyod Mirsaidov[1,2*], **Andrey Savitskiy**[1], **Abdulkhakim Salokhiddinov**[1]

[1] The “Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers” National Research University, 100000, Uzbekistan, Tashkent, Qary-Niyazova str., 39

[2] Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures named after M. T. Urazbaev, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 33 Durmon Yuli str., Tashkent, 100125, Uzbekistan

[*] **Corresponding author:** theormir@mail.ru

ABSTRACT

This article presents advances in a computational hydrodynamics method that uses an absolutely conservative scheme for momentum and impurity transfer, along with explicit finite-difference approximations. It addresses several challenges in solving the Navier-Stokes equations, including deficiencies in existing velocity-field configurations, missing velocity-field evolution, and computational instabilities. The proposed approach integrates the conservative TIIAME transfer scheme (developed at TIIAME National Research University) with a de-

rived pressure evolution equation. It demonstrates high stability and conservation-law adherence for complex hydrodynamic problems. The study examines inter-component interactions, thermal energy release, and their effects on flow dynamics. The numerical simulation results for exothermic gas-flow reactions in a cylindrical region were not validated against experimental data. The algorithm solves the full Navier-Stokes equations and produces stable gas-flow distributions that are physically plausible and consistent with impurity and temperature conditions, supporting the conclusion that the algorithm is effective for a broad range of hydrodynamic problems. The proposed algorithm enables effective solutions to complex hydrodynamic problems without requiring specialized programming languages or dedicated computing systems.

KEYWORDS

Navier-Stokes equations; computational fluid dynamics; absolutely conservative scheme; explicit finite difference approximations; evolutionary pressure equation; inter-component interaction; heat energy release; TIIAME scheme; computational viscosity.

УДК 627.8:624.9:534.1

1. Введение. Проблемы вычислительной гидромеханики и практика их решения

Задачи вычислительной гидродинамики решаются на основе уравнений Навье-Стокса. Главными проблемами при решении полной системы уравнений Навье-Стокса являются:

- Часто возникающая и часто также непредсказуемая потеря консервативности большинства принятых к использованию конечно-разностных схем при переносе консервативных характеристик в двумерных и трехмерных задачах. Сходящиеся и затем расходящиеся в пространстве поля скоростей при их описании конечно-разностными аппроксимациями порождают иногда и дополнительно необъяснимые вычислительные осцилляции.
- Организация устойчивости вычислительного процесса и борьба с появлением синусоидальных пульсаций с бесконечно возрастающей амплитудой или осцилляций типа “пила” [2],[3],[9],[14],[16].
- Отсутствие эволюционного уравнения для расчета гидродинамического давления.

Первая проблема устраняется уменьшением шагов по пространству в сетках с целью уменьшения ошибки потери консервативности до приемлемых значений [9]. В задачах, для которых требуется абсолютно точное соблюдение законов консервативности, применяют методы конечных элементов. Иногда проводиться интегрирование по поверхности конечных элементов, считаются по сложным и весьма разнообразным формулам и затем взаимно увязываются потоки (флюксы) через границы конечных элементов [21]. Хотя метод конечных элементов и решает проблему консервативности, он порождают свои собственные и пока не решенные проблемы.

Вторая проблема устраняется переходом от явных схем к неявным. Для решения неявных конечно-разностных схем были разработаны методы покоординатного расщепления уравнений и методы прямой и обратной прогонки в вычислительном процессе [7],[8],[10] ,[11]. Следует заметить, что максимальная схемная вязкость явных схем меньше или равна минимальной схемной вязкости неявных схем [20] и часто превосходит реальную физическую вязкость в тысячи раз. В результате задачи газовой динамики решать неявными схемами и получать адекватные решения становиться очень сложно.

Третья проблема. Отсутствие эволюционного уравнения для расчета гидродинамического давления привело вычислительную гидродинамику к попыткам получить и применять в расчетах эволюционное уравнение для давления [14], [15], или убрать гидродинамическое давление из расчетов. Первый подход оказался слабо продуктивным, так как или порождал сильные осцилляции, или сильно искусственно сглаживался. Попытки подавить эти осцилляции продолжались многие десятилетия. Полученные результаты не позволили широко применять данный подход в практических расчетах. Причина связана с введением значительной искусственной вязкости или даже определением такого нового понятия как псевдо время [13, 15].

Операцию по удалению гидродинамического давления используют в климатологии и океанологии и называют “урезание до гидростатики” уравнений переноса импульса[1],[2],[7],[8].

Методика исследований

Целью исследований, результаты которых приведены в данной статье, была попытка устранения вышеперечисленных проблем в примере решения достаточно сложной гидродинамической задачи. В частности, в статье:

- рассмотрено, как используя алгоритм расчета и консервативную схему переноса консервативных примесей и импульса движения, разработанные в НИУ ТИИИМСХ [12],[17–19], и используя только явные конечно-разностные аппроксимации, решать сложные задачи вычислительной гидромеханики;
- рассмотрен расчет движения многокомпонентной среды в цилиндрических координатах;
- рассмотрены процессы взаимодействия компонент газов между собой, с выделением тепловой энергии и влиянием этих изменений на характеристики движения потока;
- показано, как следует учитывать в расчетах сложную форму области расчета даже при наличии непроницаемых препятствий;
- показано, что для решения сложных гидродинамических задач не обязательно привлекать сложные языки программирования и сложные алгоритмы. Вполне достаточно обычных электронных таблиц EXCEL и знания встроенного в таблицы обычного языка VISUAL BASIC;
- показано, как можно получить и как использовать в расчетах эволюционное уравнение для гидродинамического давления,
- показано, как использовать только явные конечно-разностные аппроксимации, которые обладают меньшим проявлением счетной вязкости;
- показано, как следует поступать, чтобы сохранить консервативность конечно-разностной схемы переноса в цилиндрических координатах вблизи нулевого радиуса.

Рассматривается гидродинамическая задача определения скоростей, потоков массы вещества и энергии в цилиндрической области решения. При взаимодействии двигающихся компонент происходит химическая экзотермическая реакция с выделением тепла. Объектом тестирования являлся процесс в цилиндрической области, имитирующий рабочий цикл тепловых машин. При этом основной упор делается не на конструктивные особенности устройства, а на универсальность и воспроизводимость предлагаемого математического аппарата для широкого спектра инженерных расчетов.

2. Основная часть

Выпишем вместе замкнутую систему уравнений сжимаемого газа [4], [5], [6], [16] для которой составим алгоритм решения

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \bullet \nabla \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\varrho} grad\,(P + P_{\text{a}}) + \nu \bullet \triangle \vec{V} - \Phi \vec{V}, \tag{1}$$

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{V} \bullet grad\varrho = -\varrho div \vec{V}, \tag{2}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \bullet gradT = \frac{\lambda}{c_v \varrho} divgradT - \frac{P}{c_v \varrho} \bullet div\vec{V} + \frac{Q}{c_v \varrho}, \tag{3}$$

$$P = \varrho \bullet R \bullet T, \quad \text{или} \quad P = \varrho \bullet \left(C_p - C_v\right) \bullet T, \quad \text{или} \quad P = \varrho \bullet C_v \bullet (\gamma - 1) \bullet T \tag{4}$$

где:

$\vec{V}$ – скорость $\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$ (составляющие вектора $\vec{V} \longrightarrow$ Vx , Vy, Vz);

Ф – сомножитель, описывающий существование (Ф=100 $\left[\frac{1}{\text{с}}\right]$), отсутствие (Ф=0$\left[\frac{1}{\text{с}}\right]$) препятствия на пути движения потока;

ν – коэффициент кинематической вязкости для воздуха ν =1.52 10^{-5} $\left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}}\right]$;

ϱ– плотность газа, для воздуха ($\varrho = 1.2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$) ;

λ – коэффициент молекулярной теплопроводности, для воздуха λ =0.25$\left[\frac{\text{дж}}{\text{м} \bullet \text{К} \bullet c}\right]$ при температуре 20C^o;

Q– внутренний источник энергии $\left[\frac{\text{дж}}{\text{м}^3 \text{с}}\right]$;

P_{a} – постоянное фоновое значение давления атмосферы, нормальным принимается давление атмосферы, P_{a} = 101325 $[\frac{\text{н}}{\text{м}^2}]$;

R– удельная газовая постоянная для воздуха, R = 287 $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \bullet \text{К}}\right]$;

$\vec{g}$ – ускорение силы гравитации, $\vec{g}$ = 9.81 $\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$;

C_p, C_v – теплоемкости воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно; запишем и важнейшие теплофизические характеристики воздуха, которые могут оказаться полезными в дальнейшем: C_v=718$\left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \bullet \text{К}}\right]$, C_p=1005$\left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \bullet \text{К}}\right]$, $\gamma = \frac{C_p}{C_v} \approx 1.4$ – показатель адиабаты, $C_p - C_v = R$.

Возьмем полную производную по времени от обеих частей уравнения (4).

$$\frac{dp}{dt} = R\left(T\frac{d\varrho\bullet}{dt} + \varrho \bullet \frac{dT}{dt}\right) \tag{5}$$

Подставим выражения для полной производной по времени от плотности и температуры из уравнений (2) и (3) в уравнение (5)

$$\frac{dp}{dt} = R\left(-T \bullet \varrho \bullet div\vec{V} + \varrho \bullet \left[\frac{\lambda}{c_v \bullet \varrho} \bullet divgradT - \frac{P}{c_v \varrho} \bullet div\vec{V} + \frac{Q}{c_v \bullet \varrho}\right]\right) \tag{6}$$

Уравнение (6) эволюционное относительно величины давления. Именно это уравнение следует использовать в расчетах гидродинамических задач, в которых присутствуют внутренние источники тепловой энергии -Q.

Только с целью увеличения скорости вычислений уберем из уравнения (6) слагаемое, связанное с молекулярной передачей тепла. Заметим, что для уточненных расчетов это слагаемое может учитываться, не создавая никаких дополнительных вычислительных проблем, кроме некоторого увеличения времени расчета. Вторая производная с положительным знаком в правой части эволюционного уравнения считается консервативно и без проблем. Упростив, получим

$$\frac{dp}{dt} = -R \bullet T \bullet \varrho \bullet div\vec{V} - \frac{RP}{c_v} \bullet div\vec{V} + \frac{R \bullet Q}{c_v} \tag{7}$$

Чтобы применить консервативную схему переноса НИУ ТИИИМСХ [12], [17–20], и не получать дополнительно возникшее/исчезнувшее давление в результате вычислений его при переносе потоком, добавим к левой и правой части уравнения (7) $P \bullet div\vec{V}$.

Тогда

$$\frac{dp}{dt} + P \bullet div\vec{V} = P \bullet div\vec{V} - R \bullet T \bullet \varrho \bullet div\vec{V} - \frac{R \bullet P}{c_v} \bullet div\vec{V} + \frac{R \bullet Q}{c_v} \tag{8}$$

И в итоге получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V}\bullet gradP + P \bullet div\vec{V} = \left(P - R \bullet T \bullet \varrho - \frac{R \bullet P}{c_v}\right) \bullet div\vec{V} + \frac{R \bullet Q}{c_v} \tag{9}$$

Или, используя уравнение (4) запишем

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \overrightarrow{V} \bullet gradP + P \bullet div\overrightarrow{V} = -\frac{R \bullet P}{c_v} \bullet div\overrightarrow{V} + \frac{R \bullet Q}{c_v} \tag{10}$$

Левая часть уравнения (10) есть консервативный перенос давления двигающимся потоком газа. Первое слагаемое в правой части уравнения (10) обеспечивает учет нагревания или охлаждения газа за счет изменения его объема. Второе слагаемое в правой части уравнения (10) обеспечивает рост давления за счет какого-либо тепловыделения внутри двигающегося потока газа.

Добавим к уравнениям (1), (2), (3), (10) уравнения переноса газов (11) и (12).

$$\frac{\partial S_f}{\partial t} + divS_f \bullet \overrightarrow{V} = -k_1 Q \tag{11}$$

$$\frac{\partial S_o}{\partial t} + divS_o \bullet \overrightarrow{V} = -k_2 Q \tag{12}$$

где: $k_1 k_2-$ эмпирические коэффициенты, связывающие уменьшение концентрации газов с выделением энергии при взаимодействии газов $\left[\frac{\text{дж}}{\text{м}^3\text{с}} \frac{\text{кг}}{\text{дж}}\right]$,

S_f, S_o-концентрации некоторых газов $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right]$.

Скорость химической реакции обычно зависит от произведения концентраций взаимодействующих газов и температуры.

$$Q_r = F(S_f, S_o, T) \tag{13}$$

Формула (13) — формула, основанная на измерениях уникальных особенностей топлива и окислителя. В общем виде она описывается законом Аррениуса, который в наиболее полной и подробной форме записывается выражением (14)

$$Q = AS_f{}^{m1} S_o{}^{m2} e^{-\frac{E_a}{RT}} \tag{14}$$

где: E_a- энергия активации,

$m1, m2, A-$ эмпирические коэффициенты, характерные для газов S_f и S_o.

Коэффициент пропорциональности - A имеет размерность в неразрывной связи с показателями степеней при концентрациях в законе (14). Коэффициент - A определяется на основе экспериментов для каждой уникальной комбинации топлива и окислителя. Только для того чтобы сократить время необходимое для вычислений аппроксимируем закон Аррениуса (14) простейшей линейной связью (15).

$$Q = A \bullet S_f \bullet S_o \bullet T \bullet \tag{15}$$

В результате имеем замкнутую систему из семи уравнений (1),(2),(3),(10),(11),(12),(15) для определения семи переменных: скорости - $\overrightarrow{V}$, температуры- T, плотности - ϱ , давления - P, компоненты - S_f, компоненты - S_oи скорости тепловыделения от взаимодействия компонент - Q.

Конечно-разностные схемы, расшифровка схем и пояснения.

Описание конечно-разностной схемы переноса

Все уравнения математической модели эволюционны относительно искомых переменных, кроме уравнения состояния газа, которое не может создать никаких вычислительных проблем. Все эволюционные уравнения в своей части, ответственной за консервативный перенос, имеют форму записи (16) или могут быть приведены к ней.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + div\psi \bullet \overrightarrow{V} = * * * \tag{16}$$

где: $\psi-$ искомая переменная.

Для применения разработанной консервативной схемы НИУ ТИИИМСХ [17–20] дивергентную форму записи эволюционных уравнений типа (16) следует тождественно перевести в недивергентную форму (18). Схема переноса НИУ ТИИИМСХ [17–20] многократно проверялась на самых разных конфигурациях векторных полей. Она оказывалась консервативной и в тех случаях, когда иные схемы давали или ошибки по консервативности, или порождали вычислительные осцилляции, не имеющие отношения к реальности. Рассматривать для простоты будем только двумерные пространства. Переход в трехмерное пространство возможен и может быть сделан в полной аналогии.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi V_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi V_y}{\partial y} + * * * \longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\psi \frac{\partial V_x}{\partial x} - \psi \frac{\partial V_y}{\partial y} - V_x \frac{\partial \psi}{\partial x} - V_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + * * * \tag{17}$$

Запишем конечно-разностную схему, из которой алгебраическими преобразованиями легко извлекается для расчета искомая характеристика, принадлежащая расчетному временному слою – t+1. Выражение (18) — это конечно-разностная схема НИУ ТИИИМСХ [17–20] разработанная для расчета именно переноса в пространстве консервативных характеристик.

$$\frac{\psi_{i,j}^{t+1}-\psi_{i,j}^{t}}{\Delta t}=$$

$$\text{Для коорд. OX}\quad\begin{cases}-max(0,Vx_{i,j}^{t})\bullet(\psi_{i,j}^{t}-\psi_{i-1,j}^{t})-\psi_{i,j}^{t}\bullet max(0,Vx_{i+1,j}^{t}-max(0,Vx_{i,j}^{t})\\ -min(0,Vx_{i,j}^{t})\bullet(\psi_{i+1,j}^{t}-\psi_{i,j}^{t})-\psi_{i,j}^{t}\bullet min(0,Vx_{i,j}^{t}-min(0,Vx_{i-1,j}^{t})\end{cases}$$

$$\text{Для коорд. OY}\quad\begin{cases}-max(0,Vy_{i,j}^{t})\bullet(\psi_{i,j}^{t}-\psi_{i,j-1}^{t})-\psi_{i,j}^{t}\bullet max(0,Vy_{i,j+1}^{t}-max(0,Vy_{i,j}^{t})\\ -min(0,Vy_{i,j}^{t})\bullet(\psi_{i,j+1}^{t}-\psi_{i,j}^{t})-\psi_{i,j}^{t}\bullet min(0,Vy_{i,j}^{t}-min(0,Vy_{i,j-1}^{t})\end{cases}\qquad(18)$$

$$+***_{i,j}^{t}$$

Переход к цилиндрическим координатам и конструкция конечных разностей.

Запишем эволюционные уравнения в самом общем виде и содержащем все возможные структурные особенности уравнений математической модели сжимаемого газа.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+D_1 div\psi\bullet\vec{V}\Longleftrightarrow -D_2 grad\xi+D_3 divgrad\psi+***\qquad(19)$$

где $\psi,\xi-$ неизвестные переменные, для каждой из которых существует подобное
по структуре (19) эволюционное уравнение;
D_1,D_2D_3- некоторые параметры характерные данному эволюционному уравнению.

В случае цилиндрических координат ряд слагаемых в эволюционных уравнениях (19) изменят свою структуру. Но не все. К примеру, в цилиндрических координатах своей градиента не изменит. Запишем в развернутом виде эволюционное уравнение (20) структурно в двумерном пространстве длины – "x" и радиуса –"r".

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+D_1\left(\frac{\partial\psi\bullet V_x}{\partial x}+\frac{\partial r\bullet\psi\bullet V_r}{r\bullet\partial r}\right)\Longleftrightarrow -D_2\frac{\partial\xi}{\partial r}\left\langle\quad\text{или}\quad -D_2\frac{\partial\xi}{\partial \mathrm{x}}\right\rangle+D_3\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial(x)^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)**\qquad(20)$$

Запись уравнения сохранения вещества или импульса в форме (20) не пригодна для сборки расчетной схемы [17–20] обладающей консервативностью, физической адекватностью и потому необходимы будут некоторые тождественные преобразования.

Используя правила дифференцирования произведения функций, можно получить запись (21) тождественную записи (20) причем слагаемое, соответствующее градиенту, убираем из рассмотрения для упрощения записи.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+D_1\left(\frac{\partial\psi\bullet V_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi\bullet V_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\psi\bullet V_r\right)\Longleftrightarrow ***+D_3\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial(x)^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial(r)^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)**\qquad(21)$$

Задачи в цилиндрических координатах осесимметричны. Не осесимметричные задачи в цилиндрических координатах не записывают и не решают из-за сложностей в описании и последующей алгоритмизации.

Разберемся теперь в физическом смысле сомножителя $\frac{1}{r}$ в дополнительно появившихся двух слагаемых. Расчет производиться заменой бесконечно малых дифференциалов $-\partial r$ на малые, но не равные нулю шаги Δr. Дифференциал по радиусу становиться отличным от нуля шагом по радиусу. Пространственные поля разбиваются на расчетную сетку, состоящую из узлов, ребер и граней-ячеек. Нетрудно показать геометрией, что относительное изменение площади расчетной ячейки равно $\frac{\Delta r}{r}$ при перемещении этой ячейки ближе или дальше от оси нулевого радиуса. Ячейка, имеющая на своей границе точку, соответствующую нулевому радиусу, из криволинейного прямоугольника вырождается в сектор. Сектора, которые окружают точку нулевого радиуса, равны между собой, и это означает равенство нулю относительного изменения площадей сектора при переходе от одного сектора к другому. Это означает, что вблизи нулевого радиуса отсутствует относительное изменение площади ячеек. Это следует из осевой симметричности задачи и построенной вокруг оси симметрии симметричной расчетной сетки. Значит, в точке нулевого радиуса уравнение (21) меняет структуру и слагаемые $\frac{\psi\bullet V_r}{r}$ и $\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$ не должны учитываться в расчетах в конечных разностях. Кроме того, из симметричности задачи следует равенство нулю производных от любой переменной по направлению, перпендикулярному оси симметрии, и равенство нулю скоростей, перпендикулярных оси симметрии на этой оси, что также подчеркивает необходимость игнорирования слагаемых, содержащих теоретическую возможность появления сингулярности в точке нулевого радиуса. Для прочих расстояний расчет $\frac{\psi\bullet V_r}{r}$ не представляет труда. Для расчета слагаемого $\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$ использовались центральные разности.

Сдвинутые сетки и осреднения. Гидродинамическое давление следует считать на сдвинутых сетках. В уравнении (10) скорость перенос давления считаем как среднюю по узлам, окружающим расчетную ячейку, дивергенцию считаем по формуле (22)

$$div\vec{V}\longrightarrow\left[\left(\frac{Vx_{i,j-1}-Vx_{i-1,j-1}}{\Delta x}+\frac{Vx_{i,j}-Vx_{i-1,j}}{\Delta x}\right)+\left(\frac{Vy_{i-1,j}-Vy_{i-1,j-1}}{\Delta y}+\frac{Vy_{i,j}-Vy_{i,j-1}}{\Delta y}\right)\right]/2.\qquad(22)$$

В векторном уравнении движения (1) содержаться скалярные уравнения для расчета составляющих скорости Vx (ось X) и составляющей скорости Vy (ось Y). В этих уравнениях располагаются компоненты $\frac{\partial P}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ градиента давления ***grad*** P.

Предлагается следующая формула расчета градиента давления:

$$\begin{cases}\text{для компоненты } Vx_{i,j}\dfrac{\partial P}{\partial x}\longrightarrow\left(\dfrac{P_{i+1,j}-P_{i,j}}{\Delta x}+\dfrac{P_{i+1,j+1}-P_{i,j+1}}{\Delta x}\right)/2,\\ \text{для компоненты } Vy_{i,j}\dfrac{\partial P}{\partial y}\longrightarrow\left(\dfrac{P_{i,j+1}-P_{i,j}}{\Delta y}+\dfrac{P_{i+1,j+1}-P_{i+1,j}}{\Delta y}\right)/2.\end{cases}\qquad(23)$$

Схемные вязкости. Выбор на использование явных схем был сделан для упрощения расчетов, в связи с появлением консервативной схемы расчета переноса [17–19] и желанием уменьшить влияние схемной вязкости. Минимально схемная вязкость неявных

схем равна максимальной вязкости явных схем [5],[20]. Выбор в пользу явных схем очевиден при анализе формул (24), полученных теоретически [20].

$$\nu_{implicit} = \frac{V \bullet \Delta x}{2} \bullet \left(1 + \frac{V \bullet \Delta t}{\Delta x}\right) \quad \text{или} \quad \nu_{nonimplicit} = \frac{V \bullet \Delta x}{2} \bullet \left(1 - \frac{V \bullet \Delta t}{\Delta x}\right) \tag{24}$$

Непротиворечивость начальных условий. При задании начальных условий важно, чтобы они были непротиворечивы. Любые противоречия в начальных условиях вызовут реакцию в уравнениях и вызовут всплески в скоростях (ударные волны), которые могут вывести вычислительный процесс за пределы ограничений, налагаемых параметром Куранта на соотношение шагов по времени и пространства. При неясности задания начальных условий следует начинать расчет с очень малых шагов по времени, не позволяя развиться ударным волнам в несбалансированной среде. В случае, когда решаются задачи, в которых заметно присутствует конвекция и производиться учет сил гравитации, нужно помнить о задании градиента давления, способного противостоять силам гравитации, или потратить какое-то вычислительное время, чтобы этот градиент был найден. Решать можно непосредственно уравнение (1) вычисляя плотность по уравнению состояния среды (4) или подобному уравнению. Но имеется вариант избавления от слагаемых, в явном виде гравитацию, в уравнениях движения. Для этого следует: разбить давление на гидродинамическую и гидростатическую часть; определить изоповерхность, относительно которой считается гидростатическое давление, и, используя теорему Лейбница об дифференцировании интеграла с переменными пределами, провести тождественные преобразования, описанные и опубликованные многими авторами [4],[6]. Результатом будут три составляющих векторного уравнения (1) записанные в форме (25) с отсутствием в явном виде силы гравитации.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_x}{\partial t} + \overrightarrow{V} \bullet \nabla V_x &= -\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + g\varrho|_{Z_P}\frac{\partial Z_P}{\partial x} - g\int_{Z_P}^{z}\frac{\partial \varrho}{\partial x}dz\right)}{\varrho} + \nu \triangle V_x - \Phi V_x, \\
\frac{\partial V_y}{\partial t} + \overrightarrow{V} \bullet \nabla V_y &= -\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} + g\varrho|_{Z_P}\frac{\partial Z_P}{\partial y} - g\int_{Z_P}^{z}\frac{\partial \varrho}{\partial y}dz\right)}{\varrho} + \nu \triangle V_y - \Phi V_y, \\
\frac{\partial V_z}{\partial t} + \overrightarrow{V} \bullet \nabla V_z &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \triangle V_z - \Phi V_z,
\end{aligned} \tag{25}$$

Постановка задачи.

В цилиндрическую область длиной 1 метр и переменного внутреннего диаметра (в среднем диаметр равен 45 см, площадь сечения поступающего потока газа $0.0585 м^2$) направляется транзитный поток газа со максимальной скоростью $1 \frac{м}{с}$ и общим расходом $0.0525 \frac{м^3}{с}$. Температура входящего транзитного потока 24 C^o. С боковых сторон в область входит газ-горючее и газ-окислитель со скоростью $0.75 \frac{м}{с}$ и с расходами по $0.021 \frac{м^3}{с}$.

Плотности всех газов, входящих в область расчета, равны $1 \frac{кг}{м^3}$. Между газами происходит экзотермическая реакция, следующая закону Аррениуса.

Обычно переходят к цилиндрическим координатам для того, чтобы сократить вдвое область расчетов, полагая, что результаты по определению должны быть симметричны. Наша задача — показать инвариантность схемы НИУ ТИИИМСХ, и потому центр симметрии будет проходить по центру области расчета, и рассчитывать предполагается всю область расчета полностью.

Расчет произведен на сетке 100 на 150 узлов. Начальное значение: равные температуры, равный всюду по всей области расчета скоростной поток. Шаг по времени выбран по параметру Куранта равному 0.7. Расчет заканчивается при максимальной скорости изменения расчетных параметров равной 0.1%. Примерное время расчета при быстродействии 2.2 мгц составляет около одного часа. Не симметричность решения при окончании расчете составляла менее 0.01%.

Результат, получаемый в расчетах, должен содержать симметричность, и это косвенно подтвердит инвариантность предлагаемого алгоритма расчета и, конечно, разностной схемы переноса НИУ ТИИИМСХ. Одновременно будут проверяться все законы сохранения.

Результаты и обсуждения.

Прежде всего, выясним консервативность расчета. На левой части рисунка 1 показано распределение потока вещества через поперечные сечения цилиндрической области расчета. Фиксируется увеличение потока массы газа после поступления компонентов горючего и окислителя в соответствии с законами сохранения. Закон сохранения массы газа выполняется, и это отражено на рисунке 1 слева. В правой части рисунка 1 отображены эпюры скоростей потока газов. Эпюры симметричны относительно оси цилиндрической области расчета.

На правой части рисунка 1 отображено сравнение эпюр скоростей газового потока на входе и выходе из зоны расчета. В поперечном сечении у центрального препятствия в зоне расчета наблюдаем увеличение скорости почти на 40 процентов.

Увеличение скорости обеспечено уменьшением площади сечения и выделением энергии от взаимодействия газов перед препятствием. Выделившаяся энергий увеличивает давление, что, в свою очередь, способствует увеличению скорости движения газа. Однако самый большой импульс движения газа наблюдается у выхода из области расчета. Именно это и происходит в реальных устройствах с внутренним горением газов.

На рисунке 2 отображено движение газового потока внутри цилиндрической области расчета. Цветами выделены зоны с различными значениями модулей вектора скорости.

Красные цвета на рисунке 2 означают зоны ускоренного движения потока. Желтый цвет характеризует зоны относительно медленного движения. Синий цвет – непроницаемая для потока газа зона области расчета. На рисунке 2 представлена графическая интерпретация распределения модулей скоростей газового потока внутри цилиндрической области расчёта, которая позволяет детально изучить кинематическую структуру течения и оценить работоспособность алгоритма [12] при моделировании осесимметричных процессов.

Визуализация наглядно демонстрирует зоны интенсивного движения потока, где наблюдается существенное повышение скорости в суженных сечениях и зонах активного тепловыделения за счёт трансформации энергии химического взаимодействия в кинетическую энергию газа. Относительно низкие значения модулей скорости, выделенные жёлтым цветом, плавно распределяются

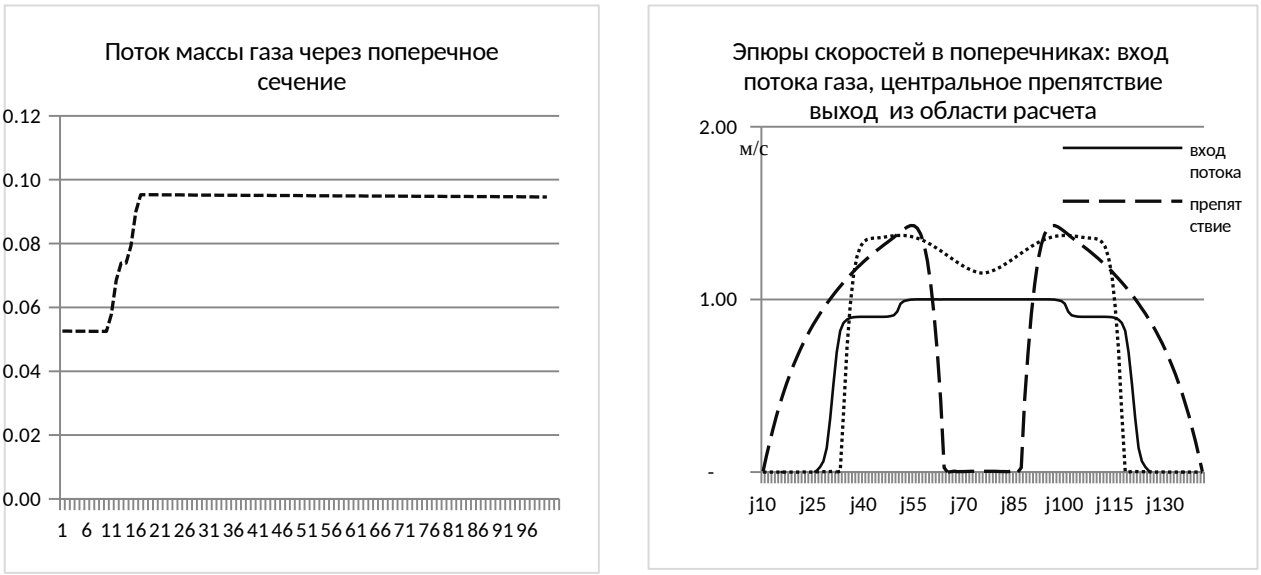


Рисунок 1. Продольный расход массы газа и эпюры скоростей в разных частях расчетной области.
Longitudinal gas mass flow rate and velocity profiles in different parts of the computational domain.

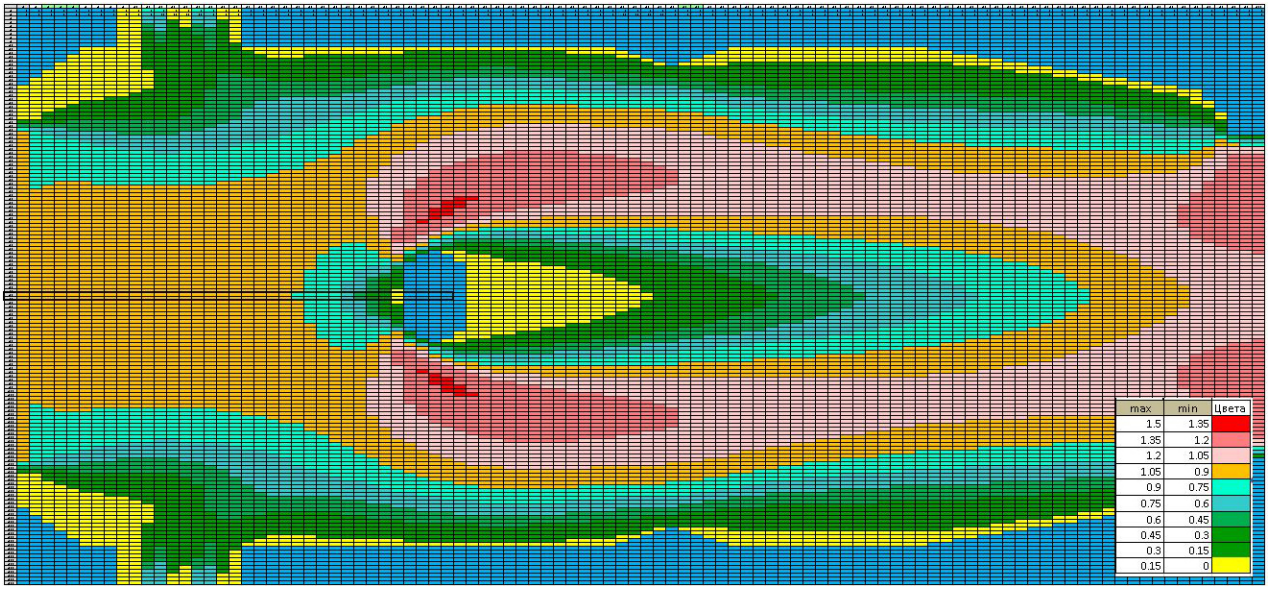


Рисунок 2. Отображение моделей скорости потока газа внутри цилиндрической области расчета.
Representation of gas-flow velocity models inside the cylindrical computational domain.

по области, что свидетельствует об устойчивости вычислительного процесса и отсутствии нежелательных численных осцилляций. Важным аспектом является отображение непроницаемых зон синим цветом, имитирующих конструктивные элементы внутри потока; чёткость их границ подтверждает эффективность подхода к учёту сложных границ расчётной области без потери точности на контактных поверхностях [12]. Характер распределения скоростей на представленном поле демонстрирует выраженную симметричность относительно центральной оси области, что служит дополнительным подтверждением инвариантности разностной схемы НИУ ТИИИМСХ [17–20]. Полученный результат подтверждает способность разработанного математического аппарата сохранять физическую адекватность при моделировании гидродинамических процессов, протекающих в устройствах со сложной внутренней конфигурацией. Использование исключительно явных аппроксимаций в сочетании с эволюционным уравнением давления позволило получить детальную картину течения, минимизировать влияние схемной вязкости [20] и обеспечивать консервативность вычислений как следствия использования схемы НИУ ТИИИМСХ [17–20].

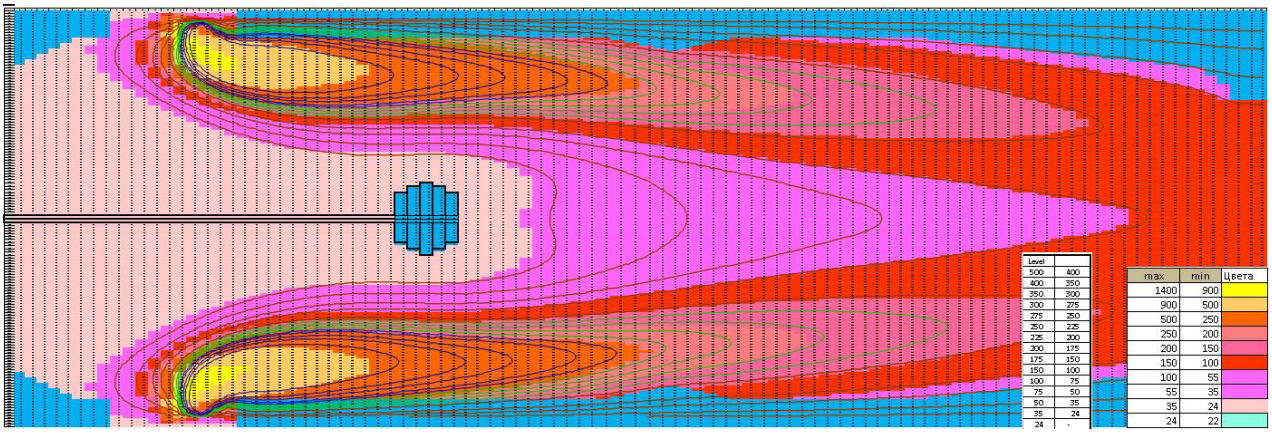


Рисунок 3. Распределение температур потока газа внутри цилиндрической области расчета.
Gas-flow temperature distribution inside the cylindrical computational domain.

На рисунке 3 изолиниями и цветовой градиентной заливкой отображено распределение температур газового потока внутри цилиндрической области расчёта, что позволяет визуализировать тепловые эффекты, возникающие при взаимодействии компонентов среды. Наиболее высокие температурные показатели, превышающие 1000°C, зафиксированы в зонах, выделенных жёлтым цветом, которые локализованы в местах интенсивного протекания экзотермических химических реакций. Характер распространения температурных фронтов демонстрирует видимую симметричность относительно центральной оси, что подтверждает физическую адекватность модели и работоспособность используемой численной схемы [17–19] и алгоритма расчета [12] в цилиндрической системе координат. Наблюдаемая температурная картина неразрывно связана с динамикой газового потока; выделяющаяся тепловая энергия приводит к локальному росту давления, который трансформируется в кинетическую энергию, обеспечивая ускорение газа на выходе из расчетной области. Визуализация температурных градиентов и концентрация изолиний свидетельствует о минимальном влиянии схемной вязкости и стабильности разработанного алгоритма [12]при решении гидродинамических задач со значительным тепловым выделением. Полученные результаты распределения температур почти совпадают в пространстве с зонами входа в поток взаимодействующих компонентов и их повышенной концентрации. На рисунке 4 изолиниями отображено распределение произведений концентраций взаимодействующих компонентов газового потока внутри цилиндрической области расчёта, что позволяет локализовать зоны наиболее интенсивного протекания химических реакций. Визуализация показывает, что максимальные значения данной величины сосредоточены в местах впрыска горючего и окислителя, где их смешение инициирует экзотермические процессы. Как это следует из закона Аррениуса, именно в этих зонах и должно происходить наиболее интенсивное тепловыделение. Характер расположения изолиний свидетельствует о том, что интенсивность химического взаимодействия напрямую коррелирует с температурными полями и динамикой давления, обеспечивая физическую связь между химизмом процесса и кинематикой потока.

На рисунке 4 изолиниями отображено значение произведения концентраций взаимодействующих компонент газового потока внутри цилиндрической области расчета.

Симметричность распределения концентраций относительно центральной оси косвенно подтверждает доказанную инвариантность предложенного алгоритма для декартовой системы координат [12], и для цилиндрических координат. В результатах расчетов полностью отсутствуют численные осцилляции при расчёте переноса многокомпонентных примесей. Использование консервативной схемы НИУ ТИИИМСХ [17–19] при моделировании данных полей позволило избежать необоснованного размытия границ взаимодействия компонентов, что критически важно для качественного и информативного расчёта количества тепловой энергии, выделяемой при взаимодействии компонентов в газовой смеси.

3. Заключение

В данной работе представлена полная замкнутая система уравнений Навье -Стокса для сжимаемого газа, которая дополнена уравнениями термодинамики и законами, описывающими химическое взаимодействия компонентов газа. Полученная замкнутая система уравнений описывает гидродинамические и термодинамические эффекты, возникающие в движущихся многокомпонентных смесях при химическом взаимодействии компонентов.

Научная новизна исследования заключается:

- в выводе и построение эволюционного уравнения для расчета гидродинамического давления в системе уравнений Навье-Стокса,
- в построении конечно-разностных аппроксимаций для слагаемых в уравнениях переноса консервативных характеристик в цилиндрической системе координат,

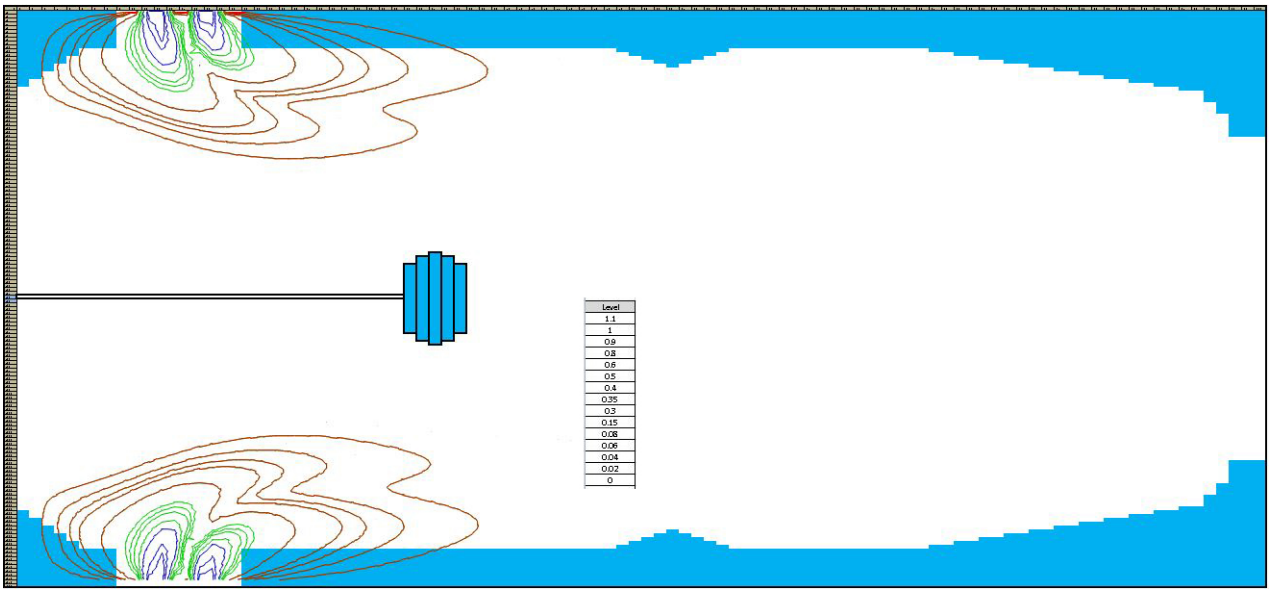


Рисунок 4. Отображение изолиниями произведений концентраций взаимодействующих компонент газового потока внутри цилиндрической области расчета.
Contours of the product of concentrations of interacting gas-flow components inside the cylindrical computational domain.

- в применении в расчете сложной гидродинамической задачи достаточно простого алгоритма решения, основанного на применении только явных схем расчета.

Предложенный подход, основанный на совместном использовании консервативной схемы переноса НИУ ТИИИМСХ [17–20] и алгоритма расчета [12] адаптированного в данной статье под цилиндрические координаты и записанного эволюционного уравнения давления, учитывающего тепловые источники, продемонстрировал устойчивость в численных расчетах. При выходе на стабилизацию решения после множества итераций в расчетах наблюдается исполнение законов сохранения компонентов газа. С каждой последующей итерацией законы сохранения в расчетах исполняются с большей точностью. Осцилляции, свойственные расчету с использованием эволюционного уравнения для давления [13–15] не возникают благодаря использованию сдвинутых сеток и применения консервативной схемы переноса НИУ ТИИИМСХ [17–20].

Практическая значимость исследования подтверждается возможностью получать решения гидродинамических задач, используя полную систему уравнений Навье-Стокса без каких-либо упрощений. Результаты расчета при симметричном задании граничных условий для цилиндрической системы координат выглядят симметрично после множества итераций. Это является явным признаком инвариантности применяемых схем и алгоритмов расчета.

Алгоритм не требователен к программной среде. Алгоритм может успешно применяться в среде доступных инструментов, таких как MS Excel и VBA, что делает его востребованным для широкого спектра прикладных инженерных расчетов без необходимости привлечения тяжеловесных вычислительных комплексов. Полученные результаты тестовой задачи полностью соответствуют ожиданиям и физике явления. Верификация и корректировка результатов следует проводить при наличии данных экспериментальных наблюдений. В статье не было цели рассчитать конкретный объект с последующей верификацией алгоритма расчетов. В статье был показан путь, который позволяет считать сложные гидродинамические задачи о движении многокомпонентных смесей с учетом их химического взаимодействия. Причем не только в декартовых, но и цилиндрических координатах. Таким образом, статья содержит математический аппарат и алгоритм расчета, который может быть рекомендован для моделирования и расчета сложных газодинамических процессов в современных технических устройствах.

Декларации / Declarations

Вклад авторов: М.М. Мирсаидов: концептуализация, курирование данных, формальный анализ, методология, валидация, визуализация. А.Г. Савицкий: концептуализация, формальный анализ, методология, валидация, визуализация, написание первоначального варианта рукописи. А.Т. Салохиддинов: концептуализация, написание первоначального варианта рукописи, рецензирование и редактирование рукописи.

Author Contributions: Mirziyod Mirsaidov: Conceptualization, Data curation, Formal analysis, Methodology, Validation, Visualization. Andrey Savitskiy: Conceptualization, Formal analysis, Methodology, Validation, Visualization, Writing – original draft. Abdulkhakim Salokhiddinov: Conceptualization, Writing – original draft, Writing – review & editing.

Конфликт интересов: Авторы заявляют об отсутствии известных им конкурирующих финансовых интересов или личных отношений, которые могли бы повлиять на работу, представленную в данной статье.

Conflicts of Interest: The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Список литературы

[1] Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1989. - 376 с.

[2] Вирц Г., Численные методы в динамике жидкостей. Москва: Изд. “Мир” 1981.

[3] Годунов С.К. и Рябенький В.С., Введение в теорию разностных схем. Москва: Физматгиз, 1962.

[4] Кочин Н. Е. Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика. Москва: Физматгиз, 1963.

[5] Курант Р. Леви Г., “О разностных уравнениях математической физики,” УМН, vol. выпуск 8, p. С. 125-160, 1940.

[6] Ландау Л. Д., Гидродинамика, 6-е изд. VI. Москва: Физматлит, 2015.

[7] Марчук Г.И. and Курбаткин Г.П.,“Численный прогноз погоды и Вселенная,” Земля и Вселенная, с.37-43, 1978.

[8] Марчук Г.И., Пененко В.В., Дымников В.П., Гутман Л.Н., Марченко А.С., Контарев Г.Р.,Кочергин В.П., “Численное моделирование атмосферных и океанических процессов,” Новосибирск: Наука, 1977, с.47-52.

[9] Роуч П. Вычислительная гидромеханика. Москва: Мир, - 1980. 616 с.

[10] Самарский А.А., Численные методы решения задач конвекции-диффузии. Москва: ЛИБРОКОМ, 2015.

[11] Самарский А.А., Введение в теорию разностных схем. Москва: Наука, 1971.

[12] Салохиддинов А.Т., Савицкий А.Г., Аширова О.А., Хакимова П.А., Абдумажидов Э. Алгоритм решения полной системы уравнений Навье-Стокса. АН РУз. Ташкент. Журн. Проблемы Механики. №3 2025. с.47-59.

[13] Cappanera, L., Giordano, S. Artificial Compressibility Method for the Incompressible Navier– Stokes Equations With Variable Density // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2025. Vol. 41, No. 5. Article e70033. DOI: 10.1002/num-70033

[14] Chorin A. J. The numerical solution of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid // Bulletin of the American Mathematical Society. 1967. Vol.73. P. 928–931. DOI: 10.1090/S0002-9904-1967-11853-6

[15] Peyret R., Taylor T. D. Computational Methods for Fluid Flow. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1983. 358 p. DOI: 10.1007/978-3-642-85952-6

[16] Roache P.J. Verification and Validation in Fluids Engineering: Some Current Issues // ASME J. Fluids Eng. 2016. Vol. 138, no. 10. P. 101205.

[17] Salokhiddinov, D. McKinney, A. Savitsky, O. Ashirova, and M. Radkevich, “Improving finite-difference schemes in the context of Navier–Stokes hydrodynamic calculations: A conservative approach to solving transfer equations,” Edelweiss Appl. Sci. Technol., vol. 9, no. 7, pp. 162–175, Jul. 2025, DOI: 10.55214/25768484.v9i7.8557.

[18] Salokhiddinov, A. Savitsky, D. McKinney, and O. Ashirova, “An improved finite-difference scheme for the conservation equations of matter,” E3S Web Conf., vol. 386, p. 06002, 2023, DOI: 10.1051/e3sconf/202338606002.

[19] Salokhiddinov, A. Savitsky, M. Radkevich, and O. Ashirova, “Possibilities of solving two-dimensional hydrodynamic problems on the basis of the non-divergent form of recording the transport and conservation equations,” E3S Web Conf., vol. 434, p. 01001, 2023, DOI: 10.1051/e3sconf/202343401001.

[20] Salokhiddinov A., Savitsky A., McKinney D., Ashirova O. Estimating Scheme Viscosity for Small-Scale Circulation with Implicit Finite-Difference Schemes, https://www.e3s-conferences.org/articles/e3sconf/abs/2023/38/e3sconf_conmechydro23_02030/e3sconf_conmechydro23_02030.html

[21] Zhiqiang Cai, Chunbo Wang, Shun Zhang. “Mixed Finite Element Methods for Incompressible Flow: Stationary Navier–Stokes Equations” SIAM Journal on Numerical Analysis, 2009, DOI: 10.1137/080718413

Отказ от ответственности / Примечание издателя

Утверждения, мнения и данные во всех публикациях принадлежат исключительно отдельным авторам и участникам и не обязательно отражают взгляды издателя, журнала или редакторов. Издатель, журнал и редакторы не несут ответственности за вред людям или ущерб имуществу, возникший вследствие использования идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в тексте.

Disclaimer of Liability/Publisher’s Note

The statements, opinions, and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and do not necessarily reflect the views of the Publisher, the Journal, or the editors. The Publisher, the Journal, and the editors disclaim responsibility for any injury to persons or damage to property resulting from any ideas, methods, instructions, or products referred to in the content.